

ASPECTE PRIVIND MODELAREA MATEMATICĂ A PRELUCRĂRII BENZILOR METALICE PRIN LAMINARE SIMETRICĂ ȘI LAMINARE ASIMETRICĂ

Autori: Oana-Denisa BOANTĂ ¹, Dănuț-Ilie MATEI ²
oanaboanta@gmail.com

Coordonatori: Șef lucr.dr.ing. Răzvan Bogdan ITU ³, Prof.univ.dr. Wilhelm W. KECS ⁴

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul IV

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Analiza de risc a fabricării produselor, anul II

³ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

⁴ Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științ., Departamentul Mat.Inf.

Rezumat

În lucrare se prezintă un model matematic al laminării benzilor metalice prin laminare. Punctul neutru și distribuția de presiune asupra arcului de contact sunt determinate. Rezultatele permit o analiză completă a benzii de laminare.

Cuvinte cheie

Model matematic, laminare, benzi metalice

1. Introducere

Printre tehnicile de prelucrare a metalelor, laminarea ocupă un loc important fiind rapidă și economică. În mod uzual, produse lungi cu diverse secțiuni transversale sunt supuse laminării. Scopul principal al laminării benzilor, având lățimea mult mai mare decât grosimea, este reducerea acesteia din urmă.

În problema de față rolele sunt presupuse identice ca rază, condiții de suprafață și viteze de operare, iar curgerea este simetrică. Rolele transferă energie benzii prin frecarea dintre cele două corpuri.

În laminarea longitudinală doar o mică parte a benzii - partea aflată între role - este supusă deformării.

Această parte a benzii este numită zona de deformare. În condiții obișnuite de laminare, banda se mișcă mai încet decât rola la intrarea în zona de deformare și mai rapid decât rola la ieșire, prezentând în zona de contact un punct neutru unde vitezele sunt egale. Forța de frecare care acționează între punctul de intrare și cel neutral avansează banda între role în timp ce forța de frecare acționând între punctul neutral și cel de ieșire se opune acțiunii laminării.

Diferența celor două forțe de frecare (suplinită eventual de o forță frontală sau de frânare) asigură puterea necesară procesului de laminare.

Analiza laminării simetrice este descrisă sub diverse aspecte, folosindu-se modele simplificate. Numeroase formulări, preponderent numerice sunt, de asemenea, prezente în literatură.

În lucrarea de față se prezintă un model matematic nou al laminării simetrice a benzilor la viteze mari care prezintă nu un punct unghiular al presiunii pe rolă ci un maxim neted în deplină concordanță cu experiența. Acest model extinde metoda utilizată în rezolvarea unor probleme de prelucrare a metalelor și la teoria laminării benzilor.

2. Formularea problemei

În modelul matematic al laminării benzilor se fac următoarele ipoteze:

care se lamează este modelată constitutiv de o ecuație vascoplăstică de tip Bingham incompresibil.

- Curgerea materialului corespunde unei deformări plane.
- Forțele volumice și termenii inerțiali se neglijează.
- Coeficientul de frecare dintre role și bandă este constant.
- Arcul de contact este mic comparativ cu circumferința rolei

și se înlocuiește prin coarda corespunzătoare.

În acest fel zona de deformare este definită de două segmente înclinate cu un unghi α și de două suprafețe de discontinuitate pentru viteza (S_1 și S_2), care separă zona de deformare de zonele cu mișcări rigide.

Presupunând pentru funcția de curent, o dezvoltare de forma

$$\psi(r, \theta) = R_2 v_2 k(\theta) + v_2 r \chi(\theta) + \frac{k}{\eta} \left[r^2 \varphi(\theta) + \frac{r^3}{R^2} \xi(\theta) \right] \quad (1)$$

Câmpurile de viteze și tensiuni din zona de deformare, în coordonate polare - r, θ - sunt date de

$$v_r = \frac{R_2 v_2 k(\theta)}{r} + v_2 \chi(\theta) + \frac{k}{\eta} \left[r \varphi'(\theta) + \frac{r^2}{R^2} \xi'(\theta) \right]$$

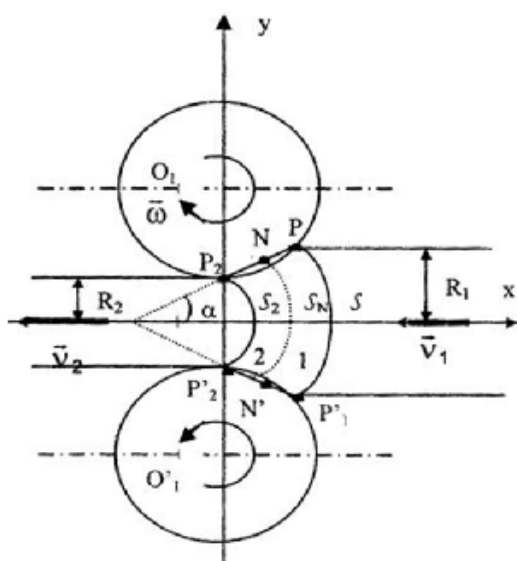


Fig. 1. Schema modelului matematic

- Rolele sunt rigide, iar banda metalică

$$v_\theta = -v_2 \chi(\theta) - \frac{k}{\eta} \left[2r\varphi(\theta) + \frac{3r^2}{R^2} \xi(\theta) \right] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} t_{rr}(r, \theta) &= \frac{\eta v_2}{R_2} \left[\frac{R_2^2}{2r^2} (k''' - 4k') + \frac{R_2}{r} (\chi''' + \chi') - e \right] - k \left[\left(\varphi''' + 4\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{F}} (k''' - 4k') \right) \ln \frac{r}{R_2} + \right. \\ &+ \left. \frac{r}{R_2} \left(\xi''' + 5\xi' + \frac{1}{2\sqrt{F}} (\chi''' + \chi') \right) + \frac{3k'}{\sqrt{F}} - 2\varphi' + E \right], \\ t_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\eta v_2}{R_2} \left[\frac{R_2^2}{2r^2} (k''' + 4k') + \frac{R_2}{r} (\chi''' + \chi') - e \right] - k \left[\left(\varphi''' + 4\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{F}} (k''' - 4k') \right) \ln \frac{r}{R_2} + \right. \\ &+ \left. \frac{r}{R_2} \left(\xi''' + 13\xi' + \frac{1}{2\sqrt{F}} (\chi''' + \chi') \right) + \frac{k'}{\sqrt{F}} + 2\varphi' + E \right], \\ t_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\eta v_2}{R_2} \left[\frac{R_2^2}{2r^2} k' + \frac{R_2}{r} (\chi'' + \chi) \right] + k \left[\frac{r}{R_2} \left(\xi'' - 3\xi + \frac{1}{2\sqrt{F}} (\chi'' + \chi) \right) + \varphi'' + \frac{k}{2\sqrt{F}} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

unde

$$\begin{aligned} k(\theta) &= a\theta + \frac{b}{2} \sin 2\theta, \\ \chi(\theta) &= c \sin \theta + d\theta \cos \theta, \\ \varphi(\theta) &= A\theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta - \frac{b}{2\sqrt{F}} \theta \cos 2\theta, \\ \xi(\theta) &= C \sin \theta + D \sin 3\theta + \frac{d}{4\sqrt{F}} \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

iar

$$F = (a + b)^2, \quad (5)$$

Definim

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{r_n}^{r_1} t_{r\theta}(r, \alpha) dr, & N_1 &= \int_{r_n}^{r_1} t_{\theta\theta}(r, \alpha) dr, \\ T_2 &= \int_{r_2}^{r_n} t_{r\theta}(r, \alpha) dr, & N_2 &= \int_{r_2}^{r_n} t_{\theta\theta}(r, \alpha) dr, \end{aligned} \quad (6)$$

Notând cu X^I și X^{II} rezultantele tensiunilor pe suprafețele singulare S_1 , respectiv S_2 se obține:

$$\begin{aligned} X^{II} + \frac{R_2}{R_1} X^I &= 4\eta v_2 \left[\sin^2 \alpha (a + 2b \cos^2 \alpha) \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + d \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \right] + 4kR_2 \left[A \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \right. \\ &+ \left. 2C \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) - 6D \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{a}{\sqrt{F}} \ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{d}{4\sqrt{F}} \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} + 2\alpha \right) \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Expresiile tensiunii relative de tragere și respective a presiunii exercitate de bandă asupra rolei de laminare sunt date de:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x^{II}}{2k} &= \frac{1}{Bg} \left[\sin^2 \alpha (a + 2b \cos^2 \alpha) \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + d \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \right] - A \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \\ &+ 2C \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) - 6D \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{a}{\sqrt{F}} \ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{d}{4\sqrt{F}} \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} + 2\alpha \right) \end{aligned} \quad (8)$$

și

$$\begin{aligned} \frac{t_{\theta\theta}(r, \alpha)}{2k} &= \frac{1}{Bg} \left[-a \frac{R_2^2}{r^2} + \frac{R_2}{r} d \cos \alpha + \frac{e}{2} \right] + \left\{ \left(2A - \frac{a}{\sqrt{F}} \right) \ln \frac{r}{R_2} + [6C \cos \alpha + 6D \cos 3\alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{d}{4\sqrt{F}} (3 \cos \alpha - 6\alpha \sin \alpha)] \frac{r}{R_2} + A + B \cos 2\alpha + \frac{b}{\sqrt{F}} \alpha \sin 2\alpha + \frac{a}{2\sqrt{F}} + \frac{E}{2} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

3. Condiții de limită

Pentru determinarea parametrilor prezenți în soluția problemei vom considera următoarele condiții de limită:

a) $v_\theta(r, \alpha) = 0$

b) $\psi(r, \alpha) = -R_2 v_2$

c) $X^I = 0$

d) condițiile de frecare: $T_1 = \pm \mu N_1$, $\mu > 0$, $j = 1, 2$

e) pe suprafețele S_1 și S_2 sunt satisfăcute condițiile dinamice de salt $[v_n] = 0$, $[t_{k1} \ n_k] = 0$

f) $v_r(r_N, \alpha) = -\omega R$, ω – viteza unghiulară a rolei de rază R .

Ecuțiile suprafețelor S_1 și S_2 rezultă din condiția e) și sunt date de:

$$\psi(r, \theta) = +v_j r \sin \theta, \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

4. Modelarea procesului de laminare asimetrică. Ecuțiile problemei

Laminarea simetrică a fost studiată folosind o ecuație constitutivă de tip Bingham și metoda perturbațiilor de către N. Sandru și G. Camenschi. Laminarea asimetrică este utilizată pentru fabricarea benzilor. Asimetria se datorează vitezelor diferite ale rolor sau a diametrelor lor diferite (fig. 2).

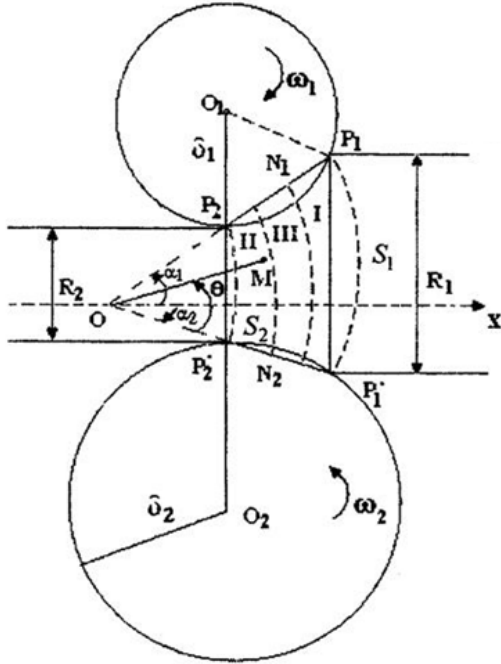


Fig. 2. Geometria procesului de laminare asimetrică

Procesul de laminare asimetrică îmbunătățește productivitatea procesului de laminare, micșorează forța de laminare, presiunea pe role, momentul de laminare.

Folosind lucrările N. Sandru și G. Camenschi, Ioan Rodica a descris procesul de laminare asimetrică a benzilor cu ajutorul metodei perturbațiilor și o ecuație constitutivă de tip Bingham. În lucrarea de față, funcția de curent a fost modificată în zona de deformare, punându-se în evidență mișcarea rolor.

Ipotezele generale sunt cele folosite de R. Ioan, completate cu altele noi, iar ecuațiile din zona de deformare au fost integrate fără a diviza zona de deformare în trei regiuni.

Funcția de curent este dată de relația:

$$\psi(r, \theta) = R_2 v_2 \left[k(\theta) + \frac{r}{R_2} \chi(\theta) + Bg \left(\frac{r^2}{R_2^2} \varphi(\theta) + \frac{r^3}{R_2^3} \xi(\theta) \right) + O(Bg)^2 \right] \quad (11)$$

Câmpul de viteze are următoarea reprezentare:

$$v_r = v_2 \left[\frac{R_2}{r} k(\theta) + \chi(\theta) + Bg \left(\frac{r}{R_2} \varphi(\theta) + \frac{r^2}{R_2^2} \xi(\theta) \right) \right] \quad (12)$$

$$v_\theta = -v_2 \left[\chi(\theta) + Bg \left(2 \frac{r}{R_2} \varphi(\theta) + \frac{r^2}{R_2^2} \xi(\theta) \right) \right]$$

5. Condițiile de limită la laminarea asimetrică

Pentru determinarea constantelor care apar prin integrarea ecuațiilor diferențiale, s-au folosit următoarele relații:

a) $v_\theta(r, \alpha_1) = 0$, $v_\theta(r, -\alpha_2) = 0$;

b) $\psi(r, \alpha) + v_j r_j \sin \theta = C_j$, $j = 1, 2$;

c) $X' = 0$

d) condiția de frecare $t_{r\theta} = \left|_{\substack{\theta=\alpha \\ r=r_i(\alpha)}}^{\substack{\theta=-\alpha \\ r=r_i(\alpha)}} = \pm m_j \sqrt{II_i} \right|_{\substack{\theta=\alpha \\ r=r_i(\alpha)}}^{\substack{\theta=-\alpha \\ r=r_i(\alpha)}}$, $i, j = 1, 2$, unde m_j sunt factorii de frecare $0 \leq m_j \leq 1$ și

$$\sqrt{II_i} = k + 2\eta \sqrt{II_d};$$

e) poziția punctului neutral al rolei superioare este dat de $v_r(r_{N_1}(\alpha_1), \alpha_1) = -\omega_1 \delta_1$ și din legea constanței volumului,

poziția punctului neutral al rolei inferioare, este: $r_{N_2}(\alpha_2) = \sqrt{r_{N_1}(\alpha_1)^2 \frac{V_1}{V_2} + 2 \frac{\delta_1 R_2}{1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)}$, unde $V_1 = \omega_1 \delta_1$ și

$$V_2 = \omega_2 \delta_2$$

f) pe suprafețele S_{N1} și S_{N2} avem $[v_n] = 0$, $[t_{k1} \ n_k] = 0$

6. Presiunea de laminare la laminarea asimetrică

După calcule laborioase, se obțin următoarea relație pentru presiunea de laminare:

$$\frac{t_{\theta\theta}(r, \alpha_1)}{2k} = \frac{1}{Bg} \left[-\frac{R_2^2}{r^2(\alpha_1)} a_1 + \frac{R_2}{r(\alpha_1)} (b_2 \sin \alpha_1 + b_4 \cos \alpha_1) + \frac{c}{2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(2A_1 - \frac{a_1}{\sqrt{F}} \right) \ln \frac{r(\alpha_1)}{R_2} + \frac{3r(\alpha_1)}{R_2} [2(-B_1 \sin \alpha_1 + B_2 \cos \alpha_1 - B_3 \sin 3\alpha_1 + B_4 \cos 3\alpha_1) + \right. \\
& + \frac{1}{4\sqrt{F}} (b_2(\sin \alpha_1 + 2\alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin 3\alpha_1) + b_4(\cos \alpha_1 - 2\alpha_1 \sin \alpha_1 - \cos 3\alpha_1))] + A_1 + A_2 \cos 2\alpha_1 - A_4 \sin 2\alpha_1 + , \quad (13) \\
& \left. + \frac{1}{2\sqrt{F}} \left(a_1 + a_2 \left(\frac{5}{2} \cos 2\alpha_1 + 2\alpha_1 \sin 2\alpha_1 \right) + a_4 \left(-\frac{5}{2} \sin 2\alpha_1 + 2\alpha_1 \cos 2\alpha_1 \right) \right) + \frac{C}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Concluzii

Rezultatele precedente permit, în cadrul modelului prezentat, o analiză completă a problemei laminării benzilor, inclusiv a determinării poziției punctului neutral.

Pentru funcția de curent în zona de deformare folosind relațiile pentru laminarea asimetrică găsim expresia presiunii de laminare și relațiile ce determină pozițiile punctelor neutrale, fără a împărți zona de deformare în trei regiuni.

Cu scop ilustrativ, se prezintă pentru laminarea simetrică un singur exemplu numeric.

Luând în seamă următoarele date geometrice și mecanice ale modelului $R_1 = 1,25 \text{ mm}$, $R_2 = 0,75 \text{ mm}$, $R = 157 \text{ mm}$, $\alpha = 0,04125$ și coeficientul de frecare $\mu = 0,00331$, iar numărul lui Bingham, $Bg = 0,83822$ respectiv $\omega R/R_2 = 0,823$. Punctul neutral este caracterizat de $r_N = 22,61822 \text{ mm}$.

Pentru tensiunea relativă de tragere (8) rezultă valoarea $\frac{\sigma_x''}{2k} = 0,0030$, o valoare neglijabilă, adică procesul de laminare are loc practic datorită frecării dintre role și materialul benzii.

În ceea ce privește presiunea benzii asupra rolei

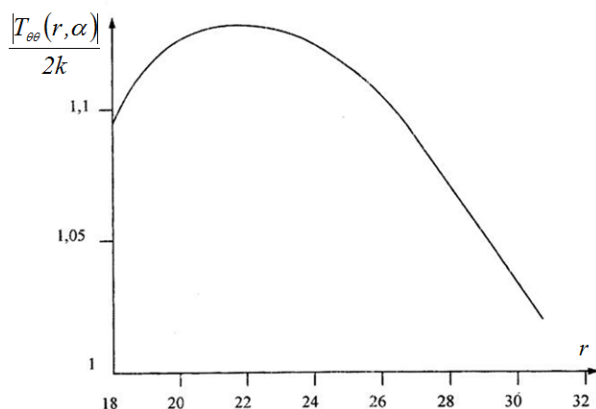


Fig. 3: Variația presiunii pe rolă

ea are o variație reprezentată în fig. 3.

Constatam o distribuție netedă a presiunii pe rolă ceea ce este în concordanță și cu datele experimentate.

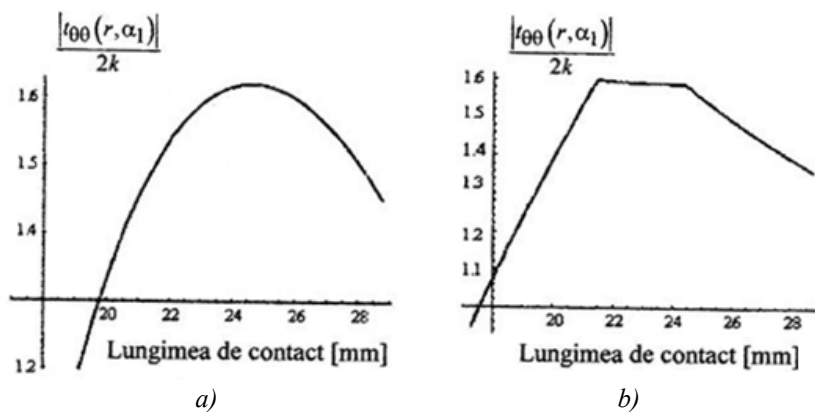


Fig. 4. Variația presiunii de laminare la laminarea asimetrică

În fig. 4, a este dată presiunea de laminare în funcție de lungimea de contact, folosind (11); în fig. 4, b este reprezentată presiunea de laminare în funcție de lungimea de contact, folosind o relație obținută de Rodica Ioan.

În fig. 4, a distribuția a presiunii de laminare este în concordanță cu datele experimentale.

Bibliografie:

1. Camenschi, G., Șandru, N., -“Modele matematice în prelucrarea metalelor”, Ed. Tehnică Buc., 2003.
2. Șandru, N., “Modelarea matematică a laminării benzilor metalice”, Materialele științifice ale celei de a XXXI – a Conferințe naționale de mecanica solidelor, Chișiău, 2007.
3. Ioan, R., “Contribuții la modelarea procesului de laminare asimetrică”, Materialele științifice ale celei de a XXXI – a Conferințe naționale de mecanica solidelor, Chișiău, 2007.

ASPECTE PRIVIND DETERMINAREA SUPORTULUI UNUI VECTOR ALUNECĂTOR ÎN FUNCȚIE DE MOMENTUL POLAR

Autori: Flavius Andrei ȘTEFAN ¹, Natalia MELNIC ¹
bobo_andrei321@yahoo.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU ², Conf.univ.dr. ing. Alexandru Vlad FLOREA ²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E, Departamentul I.M.I.T.

Rezumat

În lucrare sunt prezentate aspecte privind determinarea suportului unui vector alunecător în funcție de momentul polar.

Cuvinte cheie

Suport, vector, moment polar

1. Introducere

Un vector este o mărime fizică ce se definește prin trei proprietăți: valoare numerică, direcție și sens. Direcția unui vector este o dreaptă din spațiul de existență al vectorului care este paralelă cu vectorul. Dreapta care este coliniară cu vectorul, adică dreapta care se obține prelungind vectorul dincolo de originea și de extremitatea vectorului, se numește dreaptă suport (axa vectorului).

Versorul axei unui vector este vectorul a cărui lungime este egală cu unitatea de măsură a vectorului respectiv. Versorul precizează un sens pozitiv pe axa vectorului. Dacă vectorul are același sens cu versorul valoarea sa algebrică este pozitivă, dacă are sens contrar cu versorul valoarea algebrică este negativă.

Prin modulul vectorului se înțelege modulul valorii sale algebrice, un număr pozitiv egal cu lungimea vectorului raportată la unitatea de măsură.

Înlocuind noțiunea de valoare numerică cu modulul și noțiunea de direcție cu dreapta suport, se poate afirma că un vector se definește prin trei proprietăți: modul, dreapta suport și sens.

În mecanica clasică, după criteriul tipului originii, se definesc următoarele categorii (clase) de vectori: vectori liberi, a căror dreaptă suport poate ocupa orice poziție în spațiu, paralelă cu direcția dată, punctul de aplicație (originea) nefiind precizat; vectori alunecători, a căror dreaptă suport este fixă în spațiu și punctul de aplicație (originea vectorului) este liber pe dreapta suport; vectori legați a căror dreaptă suport este fixă în spațiu și punctul de aplicație (originea vectorului) este fixat pe dreapta suport.

Pentru orice vector \vec{v} se poate scrie expresia analitică în reperul $OXYZ$ sub forma:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (1)$$

unde v_x, v_y, v_z sunt coordonatele vectorului.

Coordonatele v_x, v_y, v_z se mai numesc componentele scalare ale vectorului \vec{v} și reprezintă proiecțiile vectorului pe axele de coordonate (fig. 1):

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}, \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}, \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}, \quad (2)$$

Modulul vectorului este dat de relația:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (3)$$

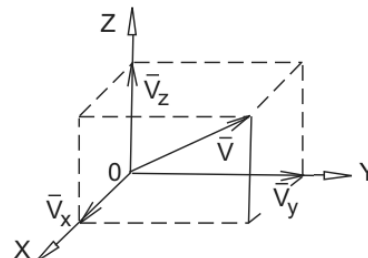


Fig. 1. Descompunerea vectorului

2. Momentul polar al unui vector

Se consideră un vector alunecător \vec{v} cu dreapta suport (Δ) raportat la un reper triortogonal $OXYZ$. Se numește moment polar al vectorului \vec{v} în raport cu polul O un vector care este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct de pe suportul (Δ) în raport cu polul O și vectorul dat. Se notează $\vec{M}_O(\vec{v})$:

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}, \quad (4)$$

unde $\vec{r} = \vec{OP}$, $P \in (\Delta)$.

Momentul polar nu depinde de alegerea punctului de pe suport, $P \in (\Delta)$ (fig. 2). Considerând un alt punct $P_1 \in (\Delta)$, se scrie următoarea relație vectorială între punctele O, P , și P_1 (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP} + \vec{PP}_1, \quad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{PP}_1, \quad (5)$$

Avem:

$$\vec{M}'_O(\vec{v}) = \vec{r}_1 \times \vec{v} = \vec{OP}_1 \times \vec{v} = (\vec{OP} + \vec{PP}_1) \times \vec{v} = \vec{OP} \times \vec{v} + \vec{PP}_1 \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{M}_O, \quad (6)$$

deoarece vectorii $\overline{PP_1}$ și \overline{v} sunt coliniari, produsul vectorial fiind egal cu zero.

Se construiește $OP_0 \perp (\Delta)$, $P_0 \in (\Delta)$ și se notează $b = OP_0$, segment numit brațul vectorului \overline{v} .

Modulul momentului polar este:

$$|\overline{M}_O(\overline{v})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{v}| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{v}) = b \cdot |\overline{v}|, \quad (7)$$

deoarece în triunghiul dreptunghic OP_0P se verifică relația

$$b = |\overline{r}| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{v}), \quad (8)$$

Relația (8) pune în evidență că locul geometric al punctelor din spațiu în raport cu care vectorul are același moment polar este o dreaptă paralelă cu suportul vectorului care conține punctul O .

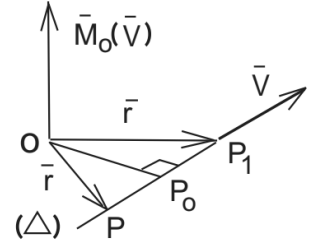


Fig. 2. Momentul polar

3. Determinarea suportului unui vector alunecător în funcție de momentul polar

Dacă un vector alunecător este dat prin expresia analitică în reperul triortogonal $OXYZ$

$$\overline{v} = v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k}, \quad (1')$$

și se cunoaște momentul său în raport cu polul O , $\overline{M}_O(\overline{v})$, adică dacă vectorul este dat prin coordonatele plückeriene, se pune problema determinării suportului, notat (Δ) .

Coordonatele Plücker (coordonatele plückeriene, introduse de Julius Plücker în secolul al XIX-lea) sunt o modalitate de a atribui șase coordonate omogene fiecărei linii (drepte) din spațiu.

Astfel, dându-se o direcție (Δ) caracterizată prin versorul \overline{u} (fig. 3), se definesc coordonatele plückeriene ale direcției (Δ) , printr-o matrice ale cărei elemente sunt:

- componentele versorului \overline{u} notate aici cu (a, b, c) , deci conform relației de definiție a versorului, \overline{u} se scrie:

$$\overline{u} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}, \quad a = \cos \alpha; \quad b = \cos \beta; \quad c = \cos \gamma, \quad (9)$$

- componentele vectorului $\overline{r} \times \overline{u} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$, iar conform de definiției produsului vectorial se scrie:

$$\overline{r} \times \overline{u} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (yc - zb)\overline{i} + (za - xc)\overline{j} + (xb - ya)\overline{k}, \quad (10)$$

unde \overline{r} este vectorul de poziție al unui punct oarecare A de pe axa (Δ) în raport cu originea sistemului de axe ales și are expresia: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Rezultă după identificare:

$$l = yc - zb; \quad m = za - xc; \quad n = xb - ya, \quad (11)$$

Deci coordonatele plückeriene ale direcției (Δ) se scriu sub forma matricei coloană:

$$[u] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Coordonatele plückeriene ale unei direcții au unele proprietăți evidente:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (13)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = |\overline{r} \times \overline{u}|^2 = |\overline{r}|^2 \cdot |\overline{u}|^2 \cdot \sin^2 \alpha = d_0^2,$$

unde $d_0 = OD$ este distanța de la punctul O la dreapta (Δ) (fig. 3).

Pentru cazul de față se consideră relația de definiție a momentului polar (4)

$$\overline{M}_O(\overline{v}) = \overline{r} \times \overline{v},$$

care se înmulțește vectorial la stânga cu vectorul \overline{v} :

$$\overline{v} \times \overline{M}_O(\overline{v}) = \overline{v} \times (\overline{r} \times \overline{v}), \quad (14)$$

Aplicând formula de dezvoltare a dublului produs vectorial, se obține:

$$\overline{v} \times \overline{M}_O(\overline{v}) = \overline{v}^2 \cdot \overline{r} - (\overline{v} \cdot \overline{r}) \cdot \overline{v}, \quad (15)$$

de unde rezultă:

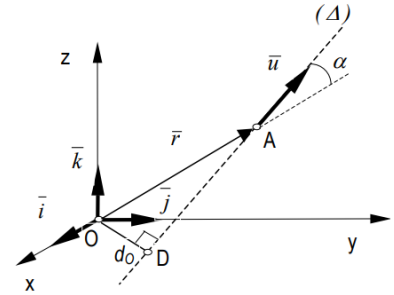


Fig. 3. Direcția (Δ)

$$\vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v},$$

sau:

$$\vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|} \right) \vec{u}, \quad (16)$$

unde s-a notat versorul vectorului \vec{v}

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (17)$$

Se observă că primul termen din (16) reprezintă vectorul de poziție în raport cu polul O al punctului $P_0 \in (\Delta)$, $OP_0 \perp (\Delta)$, unde (Δ) este dreapta suport a vectorului \vec{v} :

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2}, \quad |\vec{r}_0| = \frac{|\vec{M}_O(\vec{v})|}{|\vec{v}|} = OP_0 = b, \quad (18)$$

unde b este brațul vectorului, definit în (8), iar al doilea termen din (16) reprezintă proiecția vectorului de poziție \vec{r} pe suportul vectorului \vec{v} :

$$pr_{\vec{v}} \vec{r} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|} = \vec{r} \cdot \vec{u}, \quad (19)$$

Cu acestea, relația (16) se scrie sub forma unei ecuații vectoriale cu o infinitate de soluții \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} \cdot pr_{\vec{v}} \vec{r}, \quad \vec{r}_0 \perp \vec{u}, \quad (20)$$

având reprezentarea grafică dată în figura 4.

În figura 4, segmentul P_0P reprezintă proiecția vectorului \vec{r} pe suportul vectorului \vec{v} :

$$P_0P = (pr_{\vec{v}} \vec{r}) \cdot \vec{u}, \quad (21)$$

Notând $\lambda' = pr_{\vec{v}} \vec{r}$, parametru real, ecuația (20) se scrie sub forma:

$$(\Delta): \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda' \cdot \vec{u}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

și reprezintă ecuația vectorială a suportului vectorului \vec{v} .

Introducând în (22) vectorul \vec{r}_0 și versorul \vec{u} (relațiile (18), respectiv (1. 7)), se obține pentru suportul vectorului \vec{v} ecuația:

$$(\Delta): \vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

unde λ este un parametru real ($\lambda = \lambda' / |\vec{v}|$).

Înlocuind în relația (23) componentele scalare ale vectorilor \vec{v} și $\vec{M}_O(\vec{v})$, rezultă următoarele coordonate ale unui punct arbitrar P al suportului vectorului \vec{v} :

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_y \cdot M_{Oz}(\vec{v}) - v_z \cdot M_{Oy}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_x \\ y &= \frac{v_z \cdot M_{Ox}(\vec{v}) - v_x \cdot M_{Oz}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_y, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z &= \frac{v_x \cdot M_{Oy}(\vec{v}) - v_y \cdot M_{Ox}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_z \end{aligned} \quad (24)$$

unde λ este un parametru real, iar $M_{Ox}(\vec{v})$, $M_{Oy}(\vec{v})$, $M_{Oz}(\vec{v})$ sunt date de relațiile (componentele scalare ale momentului polar):

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{v}) &= yv_z - zv_y \\ M_{Oy}(\vec{v}) &= zv_x - xv_z, \\ M_{Oz}(\vec{v}) &= xv_y - yv_x \end{aligned} \quad (25)$$

iar componentele vectorului \vec{v} , de relația:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (1'')$$

Se face observația că momentul polar se calculează și pentru vectori legați:

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{r} = \vec{OP}, \quad (26)$$

în acest caz punctul P fiind punctul de aplicație al vectorului legat \vec{v} .

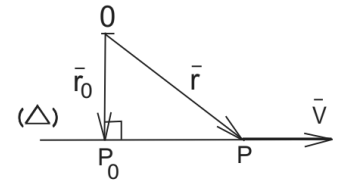


Fig. 4. Suportul vectorului \vec{v}

În continuare vom considera un exemplu în care se cere determinarea suportului vectorului alunecător în funcție de momentul polar și verificarea rezultatului obținut (fig. 5).

Vectorul \bar{v} are modulul $|\bar{v}| = v$ și expresia analitică:

$$\bar{v} = v \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{i} + 0 \bar{j} + v \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{k}, \quad (27)$$

iar vectorul de poziție:

$$\bar{r} = 0 \bar{i} + a \bar{j} + a \bar{k}, \quad (28)$$

Momentul polar a lui \bar{v} față de O este:

$$\bar{M}_O(\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} v \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (29)$$

Din (29) rezultă:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{Ox}(\bar{v}) &= a \cdot v \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot 0 = \frac{av\sqrt{2}}{2} \\ \bar{M}_{Oy}(\bar{v}) &= 0 \cdot v \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot v \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \bar{M}_{Oz}(\bar{v}) &= 0 \cdot v \frac{\sqrt{2}}{2} - a \cdot v \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{av\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

Înlocuind componentele scalare ale lui \bar{v} și $\bar{M}_O(\bar{v})$ în relațiile (24) obținem:

$$\begin{aligned} x &= \frac{0 \cdot \frac{av\sqrt{2}}{2} - \frac{v\sqrt{2}}{2} \cdot 0}{v^2} + \lambda \cdot \frac{v\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \lambda \frac{v\sqrt{2}}{2} \\ y &= \frac{\frac{v\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{av\sqrt{2}}{2} - \frac{v\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{av\sqrt{2}}{2}\right)}{v^2} + \lambda \cdot 0 \Rightarrow y = a, \\ z &= \frac{\frac{v\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{av\sqrt{2}}{2}}{v^2} + \lambda \cdot \frac{v\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \lambda \frac{v\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

Eliminând pe λ între relațiile (31) obținem:

$$x = z, y = a, \quad (32)$$

Adică suportul vectorului \bar{v} se află pe bisectoarea unui plan paralel cu xOz la distanța $y=a$ de acesta.

Verificarea ecuației suportului vectorului \bar{v} se face prin scriind ecuația dreptei determinate de două puncte, în cazul de față punctele $A(0, a, 0)$ și $B(a, a, a)$. Astfel avem:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y - a}{0} = \frac{z}{a}, \quad (33)$$

Egalând primul raport cu al treilea raport și al doilea raport cu al treilea raport din relațiile (33) se obține:

$$x = z, y = a, \quad (34)$$

același rezultat ca și cel din relațiile (32).

Concluzii

În lucrare au fost prezentate aspecte privind determinarea suportului unui vector alunecător în funcție de momentul polar, folosind coordonatele plückeriene verificarea rezultatelor obținute făcându-se cu metodele geometriei analitice.

Bibliografie

- [1] Bratu, P., – *Mecanică teoretică*, Editura IMPULS, București, 2006
- [2] Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V., *Mecanică-edifiția a doua revizuită*, E.D.P., București, 1983
- [3] Mangeron, D., Irimciuc, N., *Curs de mecanică rațională cu aplicații în ingineria mecanică, Vol. I, Mecanica solidului rigid, Fasc. 1, Teoria vectorilor alunecători și legați. Cinematica solidului rigid*, Iași, 1973.
- [4] *** Corduneanu, E., *Mecanică teoretică I*, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași, 2018

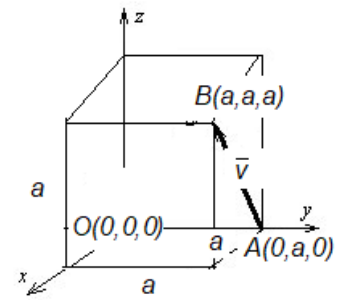


Fig. 5. Vectorul \bar{v}

FENOMENUL DE AUTOFRÂNARE ȘI FENOMENUL DE AUTOSTRÂNGERE

Autori: Marin PANCU¹, Robert-Alin ȚUGULEA¹
pancumarin@gmail.com

Coordonatori: Asist.univ. dr.ing.mat. Bogdan Ioan MARC², Asist.univ. dr.ing. Alexandra ȘOICA²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

Rezumat

Cu scopul de a-și ușura munca, omul a imaginat și construit, în decursul timpului, diferite *dispozitive mecanice simple*, pe care, ulterior, le-a perfecționat fie în vederea utilizării lor directe, fie ca părți componente ale diferitelor mașini și instalații. Din punct de vedere mecanic, un asemenea dispozitiv reprezintă un rigid sau un sistem de rigide supus la o serie de forțe exterioare și forțe de legătură, care se pot reduce în esență la două forțe: o forță motoare (F_m) care caută să pună sistemul în mișcare și o forță rezistentă (F_r), care se opune mișcării.

De regulă, cu ajutorul acestor dispozitive mecanice simple se pot învinge forțe rezistente mari întrebuintând forțe motoare mici accesibile unei acționări manuale. Uneori însă, forța motoare poate fi egală sau chiar mai mare decât forța rezistentă; într-o asemenea situație justificarea existenței dispozitivului respectiv constă în posibilitatea schimbării direcției sau sensului forței motoare. În această lucrare vom studia fenomenul de autofrânare și fenomenul de autostrângere precum și stabilirea relațiilor care există între forța motoare și forța rezistentă pentru ca ele să se echilibreze. În aceste studii se neglijează greutatea tuturor corpurilor care alcătuiesc sistemul, deoarece sunt mici comparativ cu valorile forței motoare și forței rezistente.

Cuvinte cheie

autofrânare, autostrângere, forță motoare, forță rezistentă

1. Introducere

În această lucrare se va studia echilibrul unor sisteme de corpuri întâlnite mai des în tehnică denumite *mașini și mecanisme*. Aceste sisteme de corpuri servesc la deplasarea punctelor de aplicație ale unor forțe mari denumite *forțe rezistente* aplicate la elementul de intrare (util sau rezistent) cu ajutorul unor forțe sau cupluri de valori mai mici — accesibile în general unei acționări manuale — denumite forțe motoare aplicate la elementul de ieșire (motor sau consumator).

Echilibrul acestor sisteme de corpuri va fi examinat în următoarele ipoteze care conduc la unele simplificări ale calculelor;

- se neglijează greutatea tuturor corpurilor care alcătuiesc sistemul considerat față de cele două elemente mecanice aplicate sistemului: forța sau cuplul de intrare (element mecanic rezistent) și forța sau cuplul de ieșire (element mecanic motor);

- se ține seama de frecările care apar în legăturile sistemului considerat.

În cele ce urmează se vor lua în considerare numai acele mașini care au un singur grad de libertate, adică cele a căror poziție de echilibru poate fi determinată cu ajutorul unui singur element geometric (unghi sau distanță).

2. Aspecte teoretice.

Transmiterea forțelor. Deoarece toate ecuațiile de echilibru ale corpurilor ce alcătuiesc sistemul considerat sunt liniare și omogene în raport cu elementele mecanice motor și rezistent (forță sau cuplu, și cu reacțiunile din legături), după ce se elimină din aceste ecuații reacțiunile rezultă întotdeauna o relație de forma:

$$F_m = \lambda_F \cdot F_r \quad (1)$$

în care λ_F este o mărime ce depinde numai de elementele geometrice date ale sistemului considerat, de coeficienții de frecare din legăturile acestuia și uneori de poziția elementului motor; acest factor se numește raport de transmitere a forței, deoarece el reprezintă raportul în care forța sau cuplul motor se transmit prin elementele mașinii simple considerate de la elementul de intrare la cel de ieșire.

Este important de remarcat faptul că raportul de transmitere a forței λ_F , pentru o aceeași mașină sau mecanism și pentru o aceeași poziție a sa, este variabil între două limite care corespund una tendinței de mișcare la limită în sensul forței de intrare (forța rezistentă) iar cealaltă tendinței de mișcare la limită în sensul provocat de forța de ieșire (forța motoare). Notând aceste valori extreme ale raportului de transmitere a forței cu λ_{F_r} și λ_{F_m} rezultă că :

$$\lambda_{F_r} \leq \lambda_F \leq \lambda_{F_m} \quad (2)$$

În absența frecării aceste două valori sunt egale între ele adică :

$$\lambda_{F_f} = \lambda_F = \lambda_{F_m} \quad (3)$$

Din examinarea expresiei coeficientului de transmitere a forței rezultă două proprietăți importante denumite în tehnică *autofrînarea* și *autoblocarea* mașinii considerate.

3. Fenomenul de autofrânare

O mașină sau un mecanism cu un singur grad de libertate are - în general - două posibilități de mișcare : una în sensul provocat de forța rezistentă, iar cealaltă în sensul invers acestuia și anume în sensul în care s-ar putea pune în mișcare sub acțiunea forței motoare. Este cunoscut faptul că în tehnică se caută a se evita prima posibilitate, întrucât s-ar putea provoca accidente. Într-adevăr, presupunând că mașina considerată este un trolie pentru ridicarea unei greutăți, dacă în momentul în care încetează acțiunea forței motoare (forța cu care muncitorul acționează trolieul) forța rezistentă (greutatea sarcinii ridicate) ar începe să se deplaseze accelerat în jos s-ar provoca prin aceasta accidente. Pentru a evita asemenea situații mașinile respective sunt prevăzute cu dispozitive care blochează acest sens al mișcării lor (frîne, clicheți); este însă de dorit ca o asemenea mișcare să fie împiedicată nu numai prin acțiunea dispozitivelor menționate ci prin însuși acțiunea sistemului de forțe care apar între corpurile care o alcătuiesc; în acest caz se zice că mașina respectivă prezintă fenomenul de autofrânare. Condiția ca acest fenomen să nu se producă este deci :

$$\lambda_{F_f} = 0 \quad (4)$$

pentru că numai în acest caz din relația (1) rezultă $F_m = 0$ pentru $F_r \neq 0$. În acest caz mașina sau mecanismul respectiv se află în echilibru la limita de alunecare în sensul de mișcare produs de forța de intrare (forța rezistentă); o trepidație oricât de mică, o poate pune însă în mișcare în acest sens; spre a ține seama și de acest fapt se consideră pentru mai multă siguranță că autofrînarea are loc nu atunci când forța motoare devine nulă ci atunci când ea își schimbă sensul spre a produce mișcarea în sensul forței de ieșire care rămîne cu sensul său. Aceasta revine la a spune că :

$$\lambda_{F_r} F_r < 0,$$

sau, deoarece $F_r > 0$ (a rămas cu sensul ales inițial în calcule) rezulta :

$$\lambda_{F_r} < 0. \quad (5)$$

Pentru a reuni și cazul anterior rezultă că condiția de autofrânare este :

$$\lambda_{F_r} \leq 0 \quad (6)$$

semnul egal indicînd un echilibru la limita de alunecare iar semnul mai mic un echilibru mai sigur, sub limita de alunecare.

Pentru exemplificarea celor arătate mai înainte se consideră mașina simplă alcătuită dintr-un plan înclinat. Forța rezistentă este în acest caz greutatea corpului care trebuie ridicat pe plan iar forța motoare este forța de ridicare a acestei greutăți pe plan. Configurația forțelor pentru echilibru la limita de alunecare în sensul forței de ieșire este cea arătată în figura 1 (se dau coeficientul de frecare μ dintre corp și plan și unghiul α de înclinare al planului).

Scriind ecuațiile de echilibru se obține :

$$F_m = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) F_r$$

de unde rezultă:

$$\lambda_{F_r} = \sin \alpha + \mu \cos \alpha.$$

Scriind ecuațiile de echilibru pentru cazul echilibrului la limită în sensul produs de forța rezistentă adică în jos pe planul înclinat se obține :

$$F_m = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) F_r$$

de unde rezultă :

$$\lambda_{F_r} = \sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

deoarece s-a schimbat numai sensul forței de frecare.

Forța rezistentă se transmite deci la ieșirea din acest sistem în raportul :

$$\lambda_{F_r} \leq \lambda_F \leq \lambda_{F_m}$$

sau

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha < \lambda_F < \sin \alpha + \mu \cos \alpha.$$

Deoarece forța rezistentă este aceeași (greutatea corpului) rezultă că echilibrul sistemului poate fi menținut cu valori variabile ale forței motoare este evident ca pentru ca mașina respectivă să folosească scopului pentru care a fost construită (ridicarea greutății pe planul înclinat) trebuie depusă forța motoare maximă, adică :

$$\lambda_F = \lambda_{F_m}$$

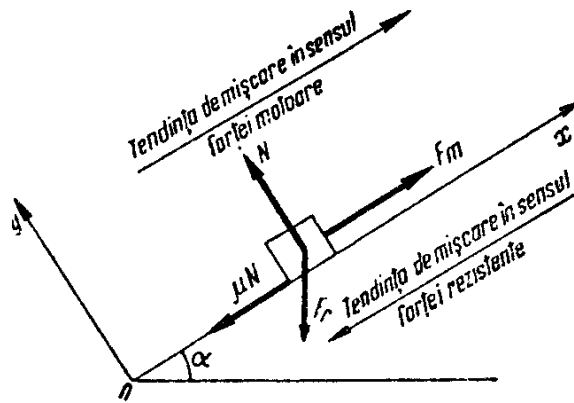


Fig. 1. Echilibrul forțelor pe planul înclinat; corpul tras în lungul planului.

Se observă că – așa cum s-a arătat – cele două valori ale raportului de transmitere a forței coincid în momentul absenței frecării ($\mu = 0$) adică :

$$\lambda_F = \lambda_{F_r} = \lambda_{F_m} = \sin \alpha$$

O observație importantă este aceea că minimum raportului de transmitere λ_{F_r} se obține din raportul de transmitere maxim λ_{F_m} schimbând semnul coeficientului de frecare μ ; aceasta este o regulă generală care este folosită la calculul valorilor extreme ale raportului de transmitere al forței.

eSpre exemplu pentru $\alpha = 45^\circ$ și $\mu = 0,1$ se obține :

$$\lambda_{F_m} = \sin 45^\circ - 0,1 \cdot \cos 45^\circ \approx 0,63$$

$$\lambda_{F_r} = \sin 45^\circ + 0,1 \cdot \cos 45^\circ \approx 0,77.$$

Aceasta înseamnă că spre a ridica pe plan o greutate $F_r = 100 \text{ N}$ trebuie depusă o forță $F_m \approx 77 \text{ N}$ În timp ce ea poate fi menținută în echilibru pe plan cu o forță variabilă F_m cuprinsă între 63...77 N.

În cazul fără frecări valorile de mai înainte devin :

$$\lambda_{F_r} = \lambda_{F_m} \approx 0,7$$

Condiția de autofrânare a planului înclinat examinat mai înainte este : $\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0$ sau $\text{tg } \alpha \leq \mu$ sau încă $\alpha \leq \varphi$ în care φ reprezintă unghiul de frecare dintre materialul corpului ridicat și cel al planului înclinat ($\text{tg } \varphi = \mu$).

Rezultă deci că pentru a avea autofrânare pe planul înclinat este necesar ca unghiul său de înclinare să nu depășească unghiul de frecare dintre materialul corpului și planul înclinat.

4. Fenomenul de autoblocare

În funcționarea unei mașini simple sau a unui mecanism pot exista anumite poziții pentru care încercarea de a-l pune în mișcare în sensul provocat de forța motoare să conducă la valori infinite de mari ale acestuia ; în aceste cazuri se spune că apare fenomenul de autoblocare. Spre deosebire de fenomenul de autofrânare care are loc la limita de alunecare în sensul produs de forța rezistentă, fenomen care este mult folosit în tehnică, fenomenul de autoblocare are loc în sensul de mișcare produs de forța motoare, apariția sa nefiind dorită, deoarece ea conduce la ruperi ale pieselor mașinii sau mecanismului respectiv, întrucât acestea nu pot transmite forțe infinite de mari.

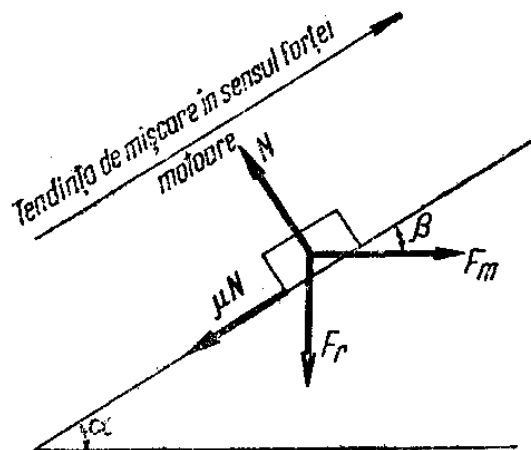


Fig. 2. Echilibrul forțelor pe planul înclinat ; corpul tras orizontal.

Ca exemplu de mașină simplă la care apare fenomenul de autoblocare se va considera tot planul înclinat cu deosebirea că forța motoare este aplicată cu un anumit unghi de înclinare în raport cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat (fig. 2.). Scriind ecuațiile de echilibru ale corpului pe planul înclinat se obține :

$$F_m = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta} F_T$$

Rezultă deci :

$$\lambda_{F_m} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta}$$

Introducând unghiul de frecare φ ($\operatorname{tg} \varphi = \mu = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$) se obține :

$$\lambda_{F_m} = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha}{\cos \beta - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}$$

Din examinarea acestei relații se observă că pentru $\beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ raportul de transmitere λ_{F_m} devine infinit, adică pentru deplasarea greutății pe plan trebuie depusă o forță motoare F_m infinită; cum acest lucru nu este posibil rezultă că sistemul nu mai poate fi pus în mișcare ; el se autoblochează. Pentru $\beta + \varphi > \frac{\pi}{2}$ raportul de transmitere al forței λ_{F_m} devine negativ ceea ce înseamnă că pentru punerea în mișcare a corpului pe planul înclinat forța de intrare trebuie să-și schimbe sensul. În concluzie condiția ca sistemul examinat să nu se autoblocheze este :

$$\beta + \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Pentru exemplul numeric dat mai înainte ($\alpha=45^\circ$, $\mu=0,1$) rezultă :
 $\varphi \approx 6^\circ$ și deci $\beta < 84^\circ$.

4. Concluzii

În concluzie putem spune că fenomenele de autofrânare și autoblocare sunt foarte importante pentru o mașină sau un mecanism deoarece pot să evite unele accidente în funcție de sensul mișcării mașinii respective. Pentru a evita asemenea situații mașinile respective sunt prevăzute cu dispozitive care blochează acest sens al mișcării lor (frâne, clicheti); este însă de dorit ca o asemenea mișcare să fie împiedicată nu numai prin acțiunea dispozitivelor menționate ci prin însuși acțiunea sistemului de forțe care apar între corpurile care o alcătuiesc.

Spre deosebire de fenomenul de autofrânare care are loc la limita de alunecare în sensul produs de forța rezistentă, fenomen care este mult folosit în tehnică, fenomenul de autoblocare are loc în sensul de mișcare produs de forța motoare, apariția sa nefiind dorită, deoarece ea conduce la ruperi ale pieselor mașinii sau mecanismului respectiv, întrucât acestea nu pot transmite forțe infinite de mari.

Bibliografie

- [1] Popovici M., *Mecanică tehnică pentru muncitori-Statica și aplicațiile ei tehnice*, Editura tehnică, București
- [2] Atanasiu M., *Mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
- [3] Bratu, P. – *Curs Mecanică Teoretică – I Statică*, Universitatea Dunărea de Jos, Galați, 2008, 220 pag;
- [4] Voinea, R., s.a. – *Mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei, București, 1989;
- [5] Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., *Mecanică teoretică*, Ed. Tehnică, București, 1968;

ASPECTE PRIVIND DETERMINAREA CARACTERISTICILOR PROPRII DE VIBRAȚIE ALE STRUCTURILOR

Autori: Florin Alexandru PEAGU ¹, Flavius COLȚAN ¹
apeagu14@gmail.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing. Răzvan Bogdan ITU ², Conf.univ.dr.ing. Andrei ANDRAȘ ²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul II

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E, Departamentul I.M.I.T.

Rezumat

În lucrare vor fi studiate unele aspecte privind calculul caracteristicilor dinamice proprii ale structurilor cu mai multe grade de libertate dinamică. Caracteristicile dinamice proprii sunt mărimi ce depind numai de proprietățile intrinseci ale sistemului fiind independente de condițiile inițiale ale mișcării.

Cuvinte cheie

Vibrații libere neamortizate, caracteristici dinamice

1. Introducere

Structurile reale se pot transforma, pe baza unei modelări corespunzătoare, în sisteme oscilante discrete cu un număr limitat de grade de libertate dinamică.

Modelul de calcul sau modelul discret simplificat va reflecta cât mai fidel comportarea sistemului real, astfel încât configurația deformatelor dinamice să fie evaluate cu cât mai multă exactitate.

Sistemele cu mai multe grade de libertate reprezintă modele de calcul pentru sistemele reale, aproximând mai bine comportarea acestora. Rezultatele obținute în acest mod sunt satisfăcătoare pentru activitatea practică.

Lucrarea prezintă aspecte privind vibrațiile libere neamortizate, rezultatul obținut fiind reprezentat de caracteristicile dinamice proprii - pulsații și perioade. Noțiunile de pulsații proprii și forme proprii de vibrație sunt caracteristice analizei dinamice liniare a unei structuri, fără amortizare.

Determinarea caracteristicilor proprii de vibrație ale structurilor se poate face prin metode exacte și metode numerice.

Ca metode exacte amintim: metoda forțelor de inerție și metoda deplasărilor,

Metoda forțelor de inerție are ca bază condiția de compatibilitate a formei deformată cu legăturile și utilizează caracteristica de flexibilitate a structurii.

Metoda deplasărilor are ca bază condiția de echilibru dinamic și utilizează caracteristica de rigiditate a structurii. Determinarea directă a valorilor și vectorilor proprii pentru structuri dezvoltate, având mai multe grade de libertate dinamică prezintă unele dificultăți de calcul. Există însă metode numerice care permit determinarea pulsațiilor și formelor proprii de vibrație, cum ar fi metoda Rayleigh (metoda energetică) și metoda matriceală iterativă.

În continuare vom prezenta dintre metodele exacte pe cea a metodei forțelor de inerție urmată de prezentarea modului de rezolvare a unei aplicații.

2. Metoda forțelor de inerție

În această metodă se exprimă deplasarea pe direcția unui grad de libertate, ca efect al tuturor forțelor de inerție ce acționează asupra sistemului oscilant la un moment dat.

Gradele de libertate ale unui sistem oscilant reprezintă numărul de parametri liniar independenți care definesc poziția maselor sistemului oscilant la un moment dat. Structurile de rezistență – ca și construcția în sine – are masa distribuită, ceea ce înseamnă că ele reprezintă sisteme cu un număr infinit de grade de libertate. Un asemenea sistem oscilant nu poate fi rezolvat matematic decât dacă este redus la un element simplu.

Pentru cazurile reale – pentru a obține modele simple, cu o rezolvare relativ simplă, dar corectă din punct de vedere practic - se consideră masa construcției concentrată în anumite puncte ale structurii, ceea ce conduce la sisteme cu număr finit – și de obicei redus – de grade de libertate. În asemenea situație, gradele de libertate se pot defini ca fiind numărul de legături simple atașate maselor concentrate, astfel încât acestea să rămână în poziția de echilibru static.

În figura 1 sunt reprezentate forțele de inerție și flexibilitățile produse de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția gradului de libertate i .

Deplasările maselor se exprimă astfel:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_{11}I_1 + \delta_{12}I_2 + \dots + \delta_{1n}I_n \\ x_2 = \delta_{21}I_1 + \delta_{22}I_2 + \dots + \delta_{2n}I_n \\ \dots \\ x_n = \delta_{n1}I_1 + \delta_{n2}I_2 + \dots + \delta_{nn}I_n \end{cases}, \quad (1)$$

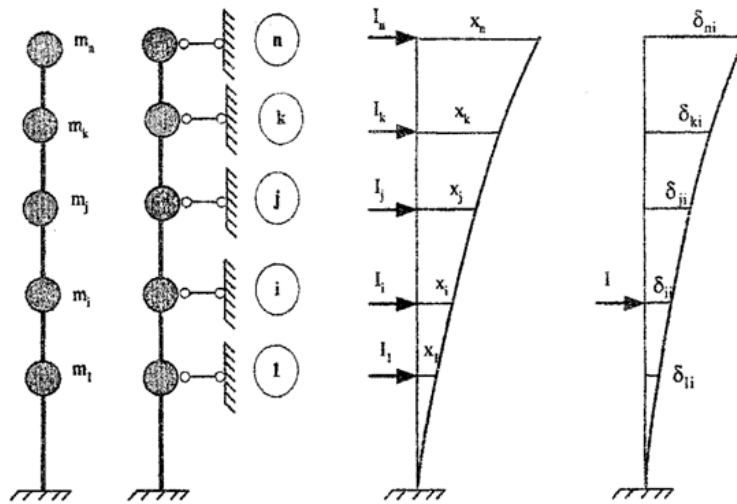


Fig. 1. Forțele de inerție și flexibilitățile

Deoarece forța de inerție are forma: $I_i = -m_i \ddot{x}_i$ din (1) se obține:

$$\begin{cases} x_1 = -\delta_{11} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{1n} m_n \ddot{x}_n \\ x_2 = \delta_{21} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{2n} m_n \ddot{x}_n \\ \dots \\ x_n = \delta_{n1} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{n2} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{nn} m_n \ddot{x}_n \end{cases}, \quad (2)$$

Sistemul de ecuații diferențiale (2) admite soluții particulare de forma celei obținute la sistemele cu un singur grad de libertate și anume $x_i = A_i \sin(\omega t + \varphi)$. Observând că $x_i = -\omega^2 A_i \sin(\omega t + \varphi)$ și înlocuind în (2) rezultă un sistem de ecuații omogene având ca necunoscute amplitudinile mișcării maselor:

$$\begin{cases} (\delta_{11} m_1 \omega^2 - 1) A_1 + \delta_{12} m_2 \omega^2 A_2 + \dots + \delta_{1n} m_n \omega^2 A_n = 0 \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 A_1 + (\delta_{22} m_2 \omega^2 - 1) A_2 + \dots + \delta_{2n} m_n \omega^2 A_n = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1} m_1 \omega^2 A_1 + \delta_{n2} m_2 \omega^2 A_2 + \dots + (\delta_{nn} m_n \omega^2 - 1) A_n = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

- soluția banală nu interesează - $A_i = 0, i=1, n$ deoarece reprezintă poziția de repaus;

- soluția $A_i \neq 0$ corespunde existenței vibrațiilor și se obține din condiția ca determinantul coeficienților necunoscutelor sistemului (3) să fie nul.

Forma acestui determinant, obținută prin împărțirea cu ω^2 este:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \lambda & \delta_{12} m_1 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \lambda & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_1 & \dots & \delta_{nn} m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

unde $\lambda = 1/\omega^2$.

Expresia (4) se numește ecuația caracteristică a mișcării. Ecuația de gradul n în λ , obținută prin dezvoltarea determinantului, are n rădăcini reale și pozitive $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$. (Perechea de soluții $\omega = -1/\sqrt{\lambda}$ nu interesează pentru că nu are sens fizic),

Rădăcinile λ se numesc valori proprii și lor le corespund vectori proprii care se obțin din sistemul (3) înlocuind pe rând rădăcinile λ_i .

Astfel, vectorul propriu X_i are forma:

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ \vdots \\ X_{n,i} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

având $X_{i,i} = 1$ (ales arbitrar)

Cu elementele vectorului propriu se reprezintă forma deformată a sistemului oscilant denumită formă proprie de vibrație.

Caracteristicile dinamice proprii ale sistemului cu mai multe grade de libertate sunt:

- pulsația $\omega_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ (cu vectorul propriu asociat),

- perioada $T_i = 2\pi / \omega_i$,
- frecvența $f_i = 1 / T_i = \omega_i / 2\pi$.

Primul mod de vibrație, având perioada cea mai mare, se numește mod fundamental de vibrație.
Vectorii proprii sunt ortogonali, adică respectă condiția:

$$\sum_{j=1}^n m_j X_{ji} X_{jk} = 0, \quad (6)$$

sau în transcriere matriceală:

$$X_i^T M X_k = 0, \quad (7)$$

Proprietatea de ortogonalitate a vectorilor formelor proprii de vibrație permite verificarea rezultatelor calculului.
În transcriere matriceală metoda forțelor de inerție are forma:

$$(\Delta \cdot M - \lambda) A = 0, \quad (8)$$

Notând $D = \Delta \cdot M$ - unde D reprezintă matricea dinamică, relația (8) devine:

$$(D - \lambda) A = 0, \quad (9)$$

care are soluția:

$$|D - \lambda| = 0, \quad (10)$$

și care reprezintă o problemă de valori și vectori proprii.

3. Exemul de rezolvare a unei aplicații cu metoda forțelor de inerție

Să se determine cu ajutorul metodei forțelor de inerție caracteristicile dinamice proprii la structura din figura 2.
Se consideră $m_1 = 500 \text{ daNs}^2/\text{m}$, $m_2 = 500 \text{ daNs}^2/\text{m}$, $A = \text{const}$ și $EA = 120000 \text{ kN}$.

În această metodă se exprimă deplasarea pe direcția unui grad de libertate, ca efect al tuturor forțelor de inerție ce acționează asupra sistemului oscilant la un moment dat.

Sistemul oscilant are două grade de libertate dinamice. În figura 3 sunt prezentate gradele de libertate ale sistemului oscilant.

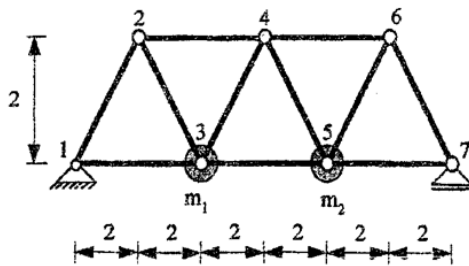


Fig. 2. Structura la care se cere determinarea caracteristicilor dinamice proprii

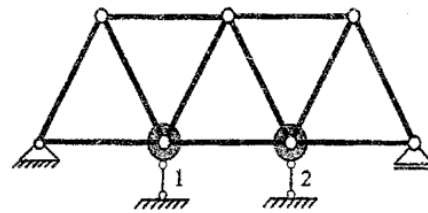


Fig. 3. Gradele de libertate ale sistemului oscilant.

Ecuția caracteristică în metoda forțelor de inerție este:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \lambda & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_2 & \delta_{22} m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

unde δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} sunt flexibilitățile sistemului oscilant, respectiv:

Deoarece în barele structurii din figura 2 apar numai eforturi axiale, flexibilitățile sistemului oscilant, se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{n_1^2}{EA} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_1^2}{EA} L_k \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \int \frac{n_1 n_2}{EA} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_1 n_2}{EA} L_k \\ \delta_{22} &= \int \frac{n_2^2}{EA} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_2^2}{EA} L_k \end{aligned}$$

În scopul schematizării eforturile produse de forțele egale cu unitatea, acționând pe direcția fiecărui grad de libertate (fig.4 și respectiv fig. 5), sunt trecute în tabelul 1

În același tabel sunt obținute elementele pentru determinarea flexibilităților:

Însumând pe coloane din tabelul 1 se vor determina flexibilitățile din ecuația caracteristică a sistemului oscilant luat în studiu.

$$\delta_{11} = \frac{76 + 48\sqrt{2}}{9EA}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{68 + 24\sqrt{2}}{9EA}; \quad \delta_{22} = \frac{76 + 48\sqrt{2}}{9EA}$$

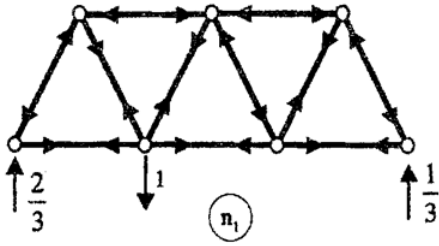


Fig. 4. Forța egală cu unitatea acționând pe direcția nodului 3

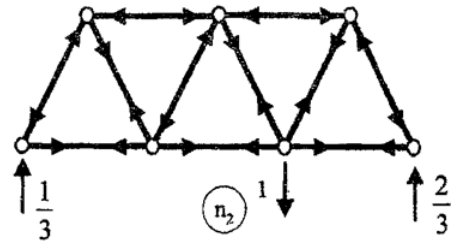


Fig. 3. Forța egală cu unitatea acționând pe direcția nodului 5

Tabelul 1. Elementele pentru determinarea flexibilităților

Bara	L	n_1	n_2	$\frac{n_1^2 L}{EA}$	$\frac{n_1 n_2 L}{EA}$	$\frac{n_2^2 L}{EA}$
1-2	$2\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{16\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{8\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$
1-3	4	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{16}{9EA}$	$\frac{8}{9EA}$	$\frac{4}{9EA}$
2-3	$2\sqrt{2}$	$+\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{16\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{8\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$
2-4	4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9EA}$	$\frac{8}{9EA}$	$\frac{16}{9EA}$
3-4	$2\sqrt{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$-\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$
3-5	4	+1	+1	$\frac{4}{9EA}$	$\frac{4}{9EA}$	$\frac{4}{9EA}$
4-5	$2\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$-\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$
4-6	4	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{9EA}$	$\frac{8}{9EA}$	$\frac{4}{9EA}$
5-6	$2\sqrt{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{8\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{16\sqrt{2}}{9EA}$
5-7	4	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9EA}$	$\frac{8}{9EA}$	$\frac{16}{9EA}$
6-7	$2\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{8\sqrt{2}}{9EA}$	$\frac{16\sqrt{2}}{9EA}$
				$\sum = \delta_{11}$	$\sum = \delta_{12}$	$\sum = \delta_{22}$

Cu aceste valori ale flexibilităților, ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} \frac{359,706}{9EA} - \lambda & \frac{509,706}{9EA} \\ \frac{254,853}{9EA} & \frac{719,411}{9EA} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Notând $\alpha = 9EA\lambda$ rezultă următoarea ecuație de gradul doi în α :

$$\alpha^2 - 1079,117\alpha + 128876,35 = 0$$

care are rădăcinile: $\alpha_1 = 942,357$ și $\alpha_2 = 136,759$

Pulsațiile vibrațiilor libere sunt:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \text{ cu } \lambda_1 = \frac{\alpha_1}{9EA}; \quad \omega_1 = 33,853 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \text{ cu } \lambda_2 = \frac{\alpha_2}{9EA}; \quad \omega_2 = 88,866 \text{ rad/s}$$

Perioadele și frecvențele vibrațiilor libere sunt:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,186s; \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = 5,388Hz$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,186s; \quad f_2 = \frac{1}{T_2} = 14,144Hz$$

Formele proprii de vibrație

Prima formă proprie. Din ecuația:

$$(\delta_{11}m_1 - \lambda_1) X_{1,1} + \delta_{12}m_2 X_{2,1} = 0$$

în condiția $X_{l,l} = 1$ rezultă

$$X_{2,1} = -\frac{\delta_{11}m_1 - \lambda_1}{\delta_{12}m_2} = +1,142 \quad \text{si} \quad X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ +1,142 \end{Bmatrix}$$

A doua formă proprie. Din ecuația:

$$(\delta_{11}m_1 - \lambda_2) X_{1,2} + \delta_{12}m_2 X_{2,2} = 0$$

în condiția $X_{l,l} = 1$ rezultă

$$X_{2,2} = -\frac{\delta_{11}m_1 - \lambda_2}{\delta_{12}m_2} = -0,437 \quad \text{si} \quad X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,437 \end{Bmatrix}$$

Verificarea ortogonalității vectorilor formelor proprii de vibrație

$$\{X_1\}^T \cdot [M] \cdot \{X_2\} = 0$$

respectiv

$$\{1 \quad 1,142\} \cdot \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,437 \end{Bmatrix} = 2,45 - 2,495 \approx 0$$

Rezultatele confirmă faptul că a fost efectuat corect întregul calcul.

Concluzii

Prin reprezentarea vectorilor proprii de vibrație se obțin formele proprii de vibrație. Modul propriu de vibrație reprezintă ansamblul dintre vectorul propriu de vibrație și valoarea proprie de vibrație corespunzătoare. În sens mai larg modul propriu de vibrație include forțele de inerție din modul respectiv, diagramele de eforturi secționale, deformațiile specifice, etc.

Un sistem dinamic cu „ n ” grade de libertate are „ n ” pulsații proprii de vibrație, „ n ” frecvențe proprii de vibrație și „ n ” perioade proprii de vibrație.

Conform principiului lui D’Alambert, deformată statică de la momentul „ t ” se obține acționând static sistemul structural cu forțele de inerție de la același moment de timp.

Bibliografie

- [1] Bănuț V., Teodorescu, M., E., Dinamica construcțiilor-Aplicații rezolvate, Editura MTRIX ROM, București, 2007
- [3] Polidor, B., *Mecanică*, Editura Impuls, București, 2006;
- [4] Voinea, R., s.a. – *Mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei, București, 1989;
- [5] Huidu, T., Popa, A., Marin, C. – *Culegere de probleme și teme aplicative de mecanică – Statica*, Editura Macarie, Târgoviște, ISBN 973 - 8135 - 61 – 3, 162 pag, 2001;

ASPECTE PRIVIND DETERMINAREA MOMENTELOR DE INERȚIE PRIN METODA OSCILAȚIILOR DE RĂSUCIRE

Autori: Ovidiu-Marian IORGA ¹, Bogdan Alexandru BIȚĂ ¹
iorga_gabriela2007@yahoo.com

Coordonatori: Conf.univ.dr.ing. Andrei ANDRAȘ ², Asist.univ.dr. ing Bogdan Ioan MARC ²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul II

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

Rezumat

În această lucrare se prezintă aspecte privind determinarea momentelor de inerție prin metoda oscilațiilor de răsucire.

Cuvinte cheie

Momente de inerție, oscilații de răsucire

1. Introducere

Conform "Dicționarului explicativ al limbii române" (DEX-1998), vibrația este o "mișcare periodică a unui corp sau a particulelor unui mediu, efectuată în jurul unei poziții de echilibru". Oscilația este "variația periodică în timp a valorilor unei mărimi care caracterizează un sistem fizic, însoțită de o transformare a energiei dintr-o formă în alta".

Oscilațiile - de natură mecanică, termică, electromagnetică etc. - sunt fenomene dinamice caracterizate prin variația în timp a unei mărimi de stare a sistemului, de obicei în vecinătatea valorii corespunzătoare unei stări de echilibru.

Vibrațiile sunt oscilații ale sistemelor elastice, adică mișcări ale sistemelor mecanice datorite unei forțe de readucere elastice. Astfel o bară elastică sau o coardă vibrează, în timp ce un pendul oscilează.

Toate corpurile care au masă și elasticitate pot vibra. Un sistem vibrator are atât energie cinetică, înmagazinată în masa în mișcare, cât și energie potențială, înmagazinată în elementul elastic ca energie de deformație. În timpul vibrațiilor, are loc o transformare ciclică a energiei potențiale în energie cinetică și invers.

2. Noțiuni generale

Una din mișcările importante întâlnite în natură este *mișcarea oscilatorie* (oparticulă oscilează când se deplasează periodic în jurul unei poziții de echilibru), în care deplasarea poate fi exprimată prin funcția dată de relația (1):

$$x = x_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (1)$$

O astfel de mișcare, continuându-se (în mod teoretic) la infinit, poartă numele de *vibrație armonică*.

Mărima variabilă x se numește *elongație*. În teoria vibrațiilor mecanice ea poate fi o *deplasare* sau un unghi.

Mărima x_0 , reprezentând valoarea maximă a elongației, este *amplitudinea* vibrației.

Mărima ω , măsurată în rad/s (sau, ceea ce este același lucru, în s^{-1}) este *pulsăția* vibrației.

Argumentul φ se numește *fază la originea timpului*.

Drumul și/sau spațiul parcurs de mobil între două treceri succesive identice prin aceeași poziție (aflându-se în același loc și mergând în același sens) formează o *perioadă* sau un *ciclu al vibrației*. Perioada unei vibrații se măsoară prin durata de timp calculată cu relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2)$$

Inversul perioadei este *frecvența* vibrației, notată cu simbolul f sau ν și se determină cu relația:

$$f = \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (3)$$

Unitatea de măsură a frecvenței este Hertz -ul care este egal cu:

$$1\text{Hz} = 1\text{per.} / \text{s}, \quad (4)$$

Vibrația unui sistem elastic, efectuată numai în urma unui impuls inițial, poartă numele de *vibrație proprie* sau *vibrație liberă*. Pulsăția ei este *pulsăția proprie* a vibrației și se notează de obicei cu p . În acest caz, ecuația vibrației armonice se scrie

$$x = x_0 \sin(p \cdot t + \varphi), \quad (5)$$

Dacă mișcarea vibratoare se află sub efectul unei forțe periodice, care o întreține, ea se numește *vibrație forțată* sau *vibrație întreținută*.

O vibrație a cărei amplitudine scade mereu cu timpul, datorită diverselor frecări din interiorul materialului sau din exterior, este vibrație amortizată.

Dintre mișcările oscilatorii cea mai des întâlnită în fenomenele naturale și care utilizează un model matematic simplu este mișcarea sinusoidală.

Cele mai simple mișcări oscilatorii sunt acelea cu un singur grad de libertate, care au o singură masă concentrată a cărei mișcare este definită printr-un singur parametru.

Ca exemple de astfel de sisteme, se pot cita:

- sistemul oscilant format din o masă m atârnată de un arc elicoidal vertical, de masă neglijabilă;
- pendulul simplu, la care variabila este unghiul φ ;
- o masă concentrată m oscilând transversal la capătul unei lame elastice de masă neglijabilă. Sistemul are un singur grad de libertate, dacă se ia ca variabilă numai deplasarea transversală a masei m ;
- un disc în vibrație de răsucire, așezat la capătul unei bare (sau fir) verticale de masă neglijabilă.

Ca aplicații ale mișcării sinusoidale, sunt:

- *Pendulul simplu*, definit ca un punct material greu de masă m suspendat de un punct O printr-un fir de lungime l de masă neglijabilă. Dacă punctul m este deplasat lateral, după care este lăsat liber, atunci punctul m va oscila;
- *Pendulul compus*, este un corp solid cu greutate proprie care poate oscila liber în jurul unei axe orizontale sub acțiunea gravitației;
- *Pendulul de torsiune*, este un alt exemplu de mișcare sinusoidală a unui corp suspendat de un fir (suspensie monofilară), de două (suspensie bifilară), de trei (suspensie trifilară), sau chiar patru fire.

Astfel, pendulul, este un corp solid care poate oscila în jurul unui punct fix sau al unei axe fixe când este scos din poziția de echilibru stabil.

În continuare se vor prezenta aspecte legate de pendulele de torsiune amintite mai sus.

3. Pendulul de torsiune cu suspensie monofilară

Se pune problema să studiem vibrația sistemului oscilant din fig. 1, format dintr-un volant de diametru D , având momentul de inerție față de axa de rotație J și un arbore (sau fir) de masă neglijabilă cu diametrul d și lungimea l , având constanta elastică k .

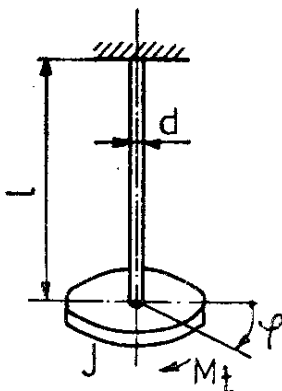


Fig. 1. Pendulul de torsiune monofilar

și rezolvarea se face în felul cunoscut

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = 0$$

$$\varphi = A \cos pt + B \sin pt \quad (9)$$

Luând condițiile inițiale

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \end{cases} \quad (10)$$

se ajunge la ecuația mișcării

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt + \frac{\dot{\varphi}_0}{p} \sin pt, \quad (11)$$

sau

$$\varphi = \Phi \sin(pt + \theta), \quad (12)$$

Unde

$$\Phi = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{p}\right)^2}, \quad (13)$$

Pentru un arbore de lungime l și diametrul d , constanta elastică de răsucire este:

$$k = \frac{GI_p}{l} = \frac{G\pi d^4}{32l}, \quad (14)$$

Această valoare s-a dedus din formula deformației de răsucire:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}, \quad (15)$$

făcând $\Delta\varphi = 1$ și calculând cuplul corespunzător.

Momentul de inerție al unui disc plin (volant), de greutate P și diametrul D , este:

$$J = \frac{mD^2}{8} = \frac{PD^2}{8g}, \quad (16)$$

iar al discului cu oboda subțire (v. roata de la o căruță, roata de antrenare șurub robinet etc.) de diametru mediu D , neglijând masa spițelor este:

$$J = \frac{mD^2}{4} = \frac{PD^2}{4g}, \quad (17)$$

respectiv

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi, \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J}\varphi = 0, \quad (7)$$

Se notează:

$$\frac{k}{J} = p^2, \quad (8)$$

4. Pendulul de torsiune cu suspensie bifilară

O altă metodă experimentală de determinare a momentelor de inerție ce utilizează metoda oscilațiilor de răsucire în cazul corpurilor de formă neregulată, precum și în cazul corpurilor neomogene este pendulul de torsiune cu suspensie bifilară (fig. 2).

Corpul AB de lungime $2a$ și greutate P , căruia urmează să i se determine momentul de inerție față de o axă ce trece prin centrul lui de greutate G se suspendă orizontal cu ajutorul a două fire egale și verticale AC și BD de lungime l , (fig. 2). În acest mod corpul se poate roti în jurul axei zz care trece prin centrul lui de greutate.

Se dă o rotație corpului în planul orizontal de un unghi α , aducându-l din poziția AB în poziția A_1B_1 , firele de suspensie făcând cu poziția lor inițială unghiul θ , dat de relația $l\theta = a\alpha$.

Pentru o deviere mică α din poziția de echilibru, tensiunea din fir se consideră $P/2$, iar momentul de rotație va fi:

$$M = 2 \frac{P}{2} \sin \theta \approx Pa\theta = P \frac{a^2}{l} \alpha, \quad (18)$$

Ecuatia mișcării de rotație $M = -\varepsilon J$ este:

$$\varepsilon J = -P \frac{a^2}{l} \alpha, \quad (19)$$

Perioada T a oscilației armonice se determină experimental cronometrând timpul în care au loc un număr de 20 - 30 oscilații.

Avem că $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Pa^2}}$, din care rezultă:

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{Pa^2}{l}, \quad (20)$$

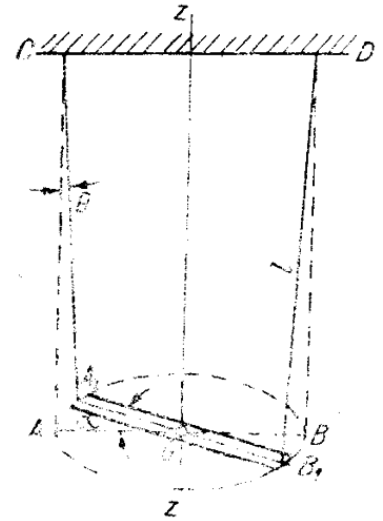


Fig. 2. Pendulul de torsiune bifilar

5. Pendulul de torsiune cu suspensie trifilară

Se pune problema să studiem vibrația sistemului oscilant din fig. 3, format dintr-un volant (platformă) de diametru $D = 2R$, având momentul de inerție față de axa de rotație J și suspendat de trei fire de lungime l dispuse simetric și fixate la periferia platformei. Firele sunt fixate în partea superioară de un disc de rază r , fix.

Dacă punem în mișcare platforma, printr-o mică deplasare unghiulară cu un unghi α_0 , aceasta va avea o mișcare oscilatorie. În această mișcare, platforma se rotește de-o parte și de alta a poziției de echilibru, și în același timp se ridică și coboară cu înălțimea h față de poziția de echilibru.

Pentru rezolvare se scrie că în orice moment suma energiilor cinetică și potențială este constantă.

Energia potențială a platformei în punctul de înălțime maximă (energie cinetică nulă) este:

$$E_p = m_0 gh, \quad (21)$$

care se transformă în energie cinetică, când platforma trece prin poziția de echilibru:

$$E_c = \frac{J_0 \omega^2}{2}, \quad (22)$$

unde J_0 ($J_0 = J_A$) este momentul de inerție față de axa de rotație (indicele zero este pentru că axa de rotație trece prin centrul de masă al sistemului) iar ω este viteza unghiulară a corpului când trece prin poziția de echilibru.

Dacă α este deplasarea unghiulară (mică) înălțimea la care se ridică platforma este $h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$ (fig. 2), care se calculează astfel:

h se poate calcula din $h = BC - BC_1$;

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = l^2(R-r)^2, BC_1^2 = A_1B^2 - A_1C_1^2 = l^2 - A_1C_1^2$$

$$A_1C_1 \text{ se obține din } \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{O_1C_1} - \overrightarrow{O_1A_1}, \text{ adică}$$

$$A_1C_1^2 = O_1C_1^2 + O_1A_1^2 - 2O_1C_1 \cdot O_1A_1 \cdot \cos \alpha$$

$$A_1C_1^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos \alpha$$

$$BC_1^2 = l^2 - r^2 - R^2 + 2rR \cos \alpha$$

$$h = \frac{BC^2 - BC_1^2}{BC + BC_1} = \frac{2rR(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1},$$

$$\text{adică, } h = \frac{4rR \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1},$$

Dacă unghiul α este mic, $\sin \alpha \cong \alpha$.

Dacă l este mult mai mare decât diferența $(R - r)$, atunci:

$$BC + BC_1 \cong 2l$$

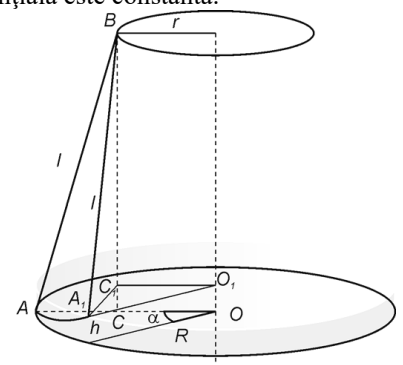


Fig. 3. Pendulul de torsiune trifilar

iar h va fi: $h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$

Dacă energiile cinetică și potențială a unui corp depind de coordonata q după legile:

$$E_c = \frac{A\dot{q}^2}{2} \text{ și } E_c = \frac{Bq^2}{2}, \quad (23)$$

mișcarea corpului este una oscilatorie, cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{B}}, \quad (24)$$

În cazul nostru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{m_0grR}}, \quad (25)$$

Măsurând perioada unui astfel de pendul, putem calcula momentul de inerție al corpului care se rotește, în cazul nostru momentul de inerție al platformei:

$$J_O = J_{\Delta} = \frac{m_0grR}{4\pi^2l} T^2, \quad (26)$$

Dacă raza platformei R și a discului r sunt egale ($r = R$) atunci vom avea:

$$J_O = J_{\Delta} = \frac{m_0gR^2}{4\pi^2l} T^2, \quad (27)$$

6. Pendulul de torsiune cu patru fire

Un disc de greutate P și diametru $2R$ este suspendat cu ajutorul a patru fire verticale fixate simetric de marginea discului (fig. 4). Se cere să se calculeze:

- frecvența proprie a discului în rotație;
- frecvența proprie de oscilație laterală a discului.

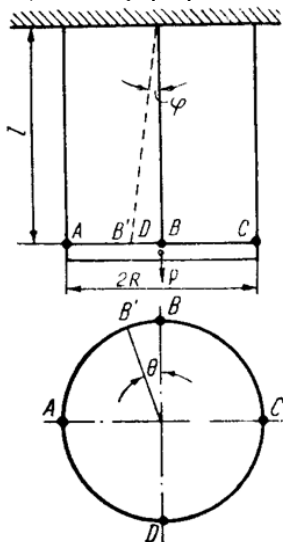


Fig. 4. Suspensia cu patru fire

a) Pentru determinarea frecvenței se utilizează ecuația energiei.

Dacă se notează cu θ unghiul de rotire al discului, energia cinetică a acestuia este $\frac{J}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$.

Dacă se notează cu φ unghiul cu care se înclină firele pentru poziția determinată de unghiul θ ,

energia potențială este: $P \frac{l\varphi^2}{2}$,

Relația dintre φ și θ este:

$$\varphi = \frac{R}{l} \theta,$$

Energia potențială are valoarea $P \frac{R^2 \theta^2}{2l}$,

Ecuația energiei este:

$$\frac{J}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + P \frac{R^2 \theta^2}{2l} = P \frac{R^2 \theta_0^2}{2l}, \quad (28)$$

în care θ_0 este amplitudinea, dată de condiția inițială.

Prin introducerea unei soluții de forma $\theta = \theta_0 \sin pt$ se obține:

$$p^2 = \frac{R^2}{Jl} P, \quad (29)$$

Înlocuind $J = \frac{PR^2}{2gl}$, se

obține:

$$p^2 = \frac{2g}{l}, f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (30)$$

b) La vibrațiile laterale (pendulare în planul desenului) energia cinetică este

$$\frac{P}{g} \left[\frac{d(l\varphi)}{dt} \right]^2,$$

Energia potențială are expresia $P \frac{l\varphi^2}{2}$

Ecuația energiei va fi:

$$\frac{P}{g} \left[\frac{d(l\varphi)}{dt} \right]^2 + P \frac{l\varphi^2}{2} = P \frac{l\varphi_0^2}{2}, \quad (31)$$

de unde:

$$p^2 = \frac{g}{l}, f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (32)$$

Pentru a determina momentul de inerție J al unui corp oarecare C de masa M acesta se așează pe platforma P în mijlocul O al acesteia și, dând o serie de oscilații de răsucire aparatului se obține în mod similar cazului de la paragraful 4.

Bibliografie

- [1]. Itu R. B., "Mecanică-Îndrumător pentru lucrări de laborator" Editura UNIVERSITAS, Petroșani, 2021;
- [2]. Voinea R., Voiculescu D., Ceaușu V., "Mecanica", Ed. Didactică și Pedagogică, 1983;
- [3]. Voinea R. P., Stroe I. V., "Introducere în teoria sistemelor dinamice", Ed. Academiei Române, București, 2000.

DETERMINAREA MOMENTELOR PRINCIPALE DE INERȚIE FOLOSIND METODA DE DETERMINARE A EXTREMELOR CONDIȚIONATE ALE UNEI FUNCȚII

Autori: Horia Mihai ICHIM¹, Natalia MELNIC¹
ichimhoria@yahoo.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU², Lector univ.dr. Anamaria POPESCU³

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

³ Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe, Departamentul M.I

Rezumat

Momentele de inerție mecanice sunt mărimi care caracterizează răspândirea maselor unui sistem material în raport cu elementele unui sistem de referință dat. În practică este importantă cunoașterea direcțiilor axelor pentru care momentul de inerție față de aceste axe are valori extreme (maxime sau minime), axe numite direcții principale de inerție. Momentele de inerție calculate față de aceste axe sunt denumite momente principale de inerție. În lucrare se prezintă aspecte privind determinarea momentelor principale de inerție folosind metoda pentru determinarea extremelor legate sau condiționate ale unei funcții de mai multe variabile utilizând metoda lui Lagrange.

Cuvinte cheie

Momente principale de inerție, metoda Lagrange

1. Introducere

În majoritatea cărților tehnice, gen memoratoare sau îndrumare cu caracter general, se găsesc tabelate valorile momentelor de inerție calculate în raport cu axe care trec prin centrul de greutate (masă) al corpurilor uzuale.

Însă în unele probleme de dinamică este necesară cunoașterea momentelor de inerție în raport cu reperi diferite (plane, axe, puncte), care, în general nu trec prin centrul de greutate (masă).

Pentru a nu se relua calculele de fiecare dată, se urmărește stabilirea unor relații care să permită determinarea acestor momente de inerție în funcție de momentele de inerție calculate față de centrul de greutate și care, în general, pot fi găsite în tabele.

Astfel se determină relații de calcul privind variația momentelor de inerție față de axe paralele. După utilizarea relațiilor lui Steiner ce se referă la variația momentelor de inerție mecanice în raport cu axe paralele se pot aplica relațiile privind variația momentelor de inerție față de axe concurente.

Se numesc axe principale de inerție, relative la un punct, acele axe concurente în punctul dat față de care valorile momentelor de inerție devin extreme. Momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc momente principale de inerție.

Cunoașterea momentelor principale de inerție dă posibilitatea aflării momentelor de inerție în raport cu orice alt sistem xOy având aceeași origine cu sistemul axelor principale și fiind rotit cu unghiul α față de acesta.

În continuare se prezintă aspecte privind determinarea momentelor principale de inerție folosind metoda pentru determinarea extremelor legate sau condiționate ale unei funcții de mai multe variabile utilizând metoda lui Lagrange.

2. Aspecte teoretice

Determinarea momentelor principale de inerție conduce la aflarea extremelor unei funcții supuse la legături. În Analiza matematică, pentru determinarea extremelor legate sau condiționate ale unei funcții de mai multe variabile, se utilizează îndeosebi metoda lui Lagrange (multiplicatorii lui Lagrange).

Definiție. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Un punct $a \in A$ se numește punct de extrem local pentru f dacă diferența $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pe o vecinătate a lui a , adică, $\exists V \in V(a)$ astfel încât $f(x) - f(a)$ păstrează același semn, $\forall x \in V \cap A$.

Mai precis, dacă $f(x) - f(a) \geq 0$, $\forall x \in V \cap A$, atunci a se numește punct de minim local pentru f , iar dacă $f(x) - f(a) \leq 0$, $\forall x \in V \cap A$, atunci a se numește punct de maxim local pentru f . Dacă $f(x) - f(a) \geq 0$, (respectiv, $f(x) - f(a) \leq 0$), $\forall x \in A$, atunci a se numește punct de minim (respectiv, de maxim) absolut pentru f .

Nu întotdeauna există pentru o funcție puncte de minim (maxim) absolut.

Valorile funcției în punctele de extrem se numesc extremele funcției.

Dacă există, $f(a) = \inf f(x)$, $\forall x \in A$ (respectiv, $f(b) = \sup f(x)$, $\forall x \in A$) se numește valoare minimă (respectiv, maximă) a lui f pe A .

În realitatea obiectivă, pe lângă situațiile în care se cer rezolvate probleme de extrem libere, fără restricții, în parte, se întâlnesc și cazuri de probleme în care extremele unei funcții se caută în condițiile satisfacerii, de către argumentele funcției respective, a unor relații de legătură între ele. În asemenea cazuri, extremele respective poartă denumirea de extreme condiționate sau, echivalent, extreme cu legături, legături ce se exprimă, adeseori, prin relații de egalitate.

Fie $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime $X \subseteq R^n$ și un sistem de $p < n$ ecuații

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, F_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

funcțiile reale F_1, F_2, \dots, F_p fiind definite pe aceeași mulțime $X \subseteq R^n$.

Extremele funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ când punctul (x_1, x_2, \dots, x_n) parcurge numai mulțimea A a soluțiilor sistemului (1) se numesc extremele funcției f condiționate de sistemul (1) sau extremele funcției f supuse la legăturile (1).

Punctele staționare ale funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ când punctul (x_1, x_2, \dots, x_n) parcurge numai mulțimea A a soluțiilor sistemului (1) se numesc puncte staționare legate sau puncte staționare condiționate ale funcției f .

Punctele de extremum condiționat sau punctele staționare condiționate se definesc în mod asemănător ca punctele extreme sau punctele staționare obișnuite (sau libere), cu condiția ca punctele respective să aparțină mulțimii A .

Punctele de extremum legate ale funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu $F_1=0, F_2=0, \dots, F_p=0$, se găsesc printre punctele staționare ale funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, deci printre punctele staționare ale funcției de $n+p$ variabile $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_p F_p$.

Numerele $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange, iar metoda folosită pentru determinarea extremelor legate se numește metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

3. Determinarea momentelor principale de inerție cu metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fiind date un corp (C) la care sunt cunoscute momentele de inerție axiale și centrifugale $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$, față de un sistem de referință $Oxyz$ (fig. 1), și o dreaptă (Δ) care trece prin O al cărei versor are cosinusurile directoare: α, β și γ momentul de inerție J_Δ al corpului față de axa (Δ), este dat de relația:

$$J_\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma, \quad (2)$$

Relația (2) exprimă legea de variație a momentelor de inerție în raport cu axe concurente.

Din relația (2) se constată că momentul de inerție mecanic J_Δ față de axa (Δ) ce trece prin originea sistemului de referință $Oxyz$ depinde de orientarea axei prin cosinusurile directoare α, β, γ , care respectă egalitatea:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad (3)$$

Pentru calculul valorilor extreme ale funcției (2) se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Metoda constă în înlocuirea funcției de studiat:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

între variabilele căreia există $p < n$ relații de legătură:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots & \\ \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}, \quad (5)$$

cu o funcție auxiliară:

$$\Phi = y + \sum_{j=1}^p \lambda_j \varphi_j, \quad (6)$$

în care λ_j sunt parametri nedeterminați, numiți multiplicatorii lui Lagrange.

Noua funcție depinde de $n+p$ variabile considerate independente.

Pentru ca funcția Φ să aibă un extrem este necesar ca cele $n+p$ derivate parțiale în raport cu $(x_1, x_2, \dots, x_n), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ să se anuleze:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} \equiv \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (7)$$

Din sistemul (7), de $n+p$ ecuații, în general neliniare, se determină multiplicatorii λ_j ($j = 1, 2, \dots, p$) și valorile variabilelor x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pentru care funcția y devine staționară, fără a putea preciza caracterul extremului.

În cazul funcției (2) există o singură relație de legătură, de forma (3), între variabilele reprezentate de cosinusurile directoare:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \quad (8)$$

Funcția ajutătoare va fi:

$$\Phi = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma + \lambda(1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2), \quad (9)$$

Egalând cu zero derivatele parțiale ale acestei funcții:

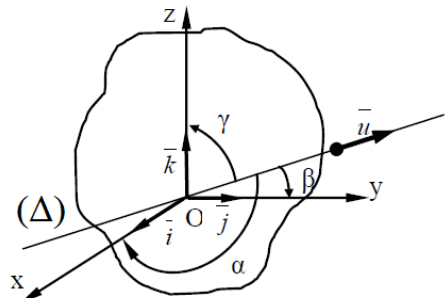


Fig. 2. Orientarea dreptei (Δ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} &= 2J_x\alpha - 2J_{xy}\beta - 2J_{xz}\gamma - 2\lambda\alpha = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} &= 2J_y\beta - 2J_{xy}\alpha - 2J_{yz}\gamma - 2\lambda\beta = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} &= 2J_z\gamma - 2J_{yz}\beta - 2J_{xz}\alpha - 2\lambda\gamma = 0\end{aligned}$$

obținem un sistem liniar și omogen în necunoscutele α, β, γ :

$$\begin{cases} (J_x - \lambda)\alpha - J_{xy}\beta - J_{xz}\gamma = 0 \\ -J_{xy}\alpha + (J_y - \lambda)\beta - J_{yz}\gamma = 0, \\ -J_{xz}\alpha - J_{yz}\beta + (J_z - \lambda)\gamma = 0 \end{cases} \quad (10)$$

care nu admite soluții banale $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$, întrucât $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Rezultă că determinantul format cu coeficienții necunoscutelor trebuie să fie nul:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

Deoarece elementele determinantului sunt simetrice față de diagonala principală ecuația de gradul trei care rezultă din dezvoltarea lui are întotdeauna rădăcini reale:

$$-\lambda^3 + L_1\lambda^2 - L_2\lambda + L_3 = 0, \quad (12)$$

unde:

$$\begin{cases} L_1 = J_x + J_y + J_z = J_1 + J_2 + J_3 \\ L_2 = J_xJ_y + J_yJ_z + J_zJ_x - J_{xy}^2 - J_{yz}^2 - J_{xz}^2 = J_1J_2 + J_2J_3 + J_3J_1 - J_{xy}^2 - J_{yz}^2 - J_{xz}^2 \\ L_3 = J_xJ_yJ_z - 2J_{xy}J_{yz}J_{xz} - J_{xy}^2J_z - J_{yz}^2J_x - J_{xz}^2J_y = J_1J_2J_3 - 2J_{xy}J_{yz}J_{xz} - J_{xy}^2J_z - J_{yz}^2J_x - J_{xz}^2J_y \end{cases} \quad (13)$$

Coefficienții L_1, L_2, L_3 sunt trei invarianți (liniar, pătratic și cubic) care nu depind de alegerea sistemului de referință $Oxyz$. Adică momentele de inerție centrifugale sunt nule: $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$.

Se demonstrează că rădăcinile ecuației (12) sunt chiar valorile extreme ale momentului de inerție J_Δ .

Înlocuind $\lambda = \lambda_1$ în (10) și asociind (8) rezultă cosinusurile directoare $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ale axei principale Δ_1 în raport cu care momentul de inerție J_Δ devine extrem. În baza relației (2) valoarea momentului de inerție corespunzătoare acestei direcții este:

$$J_1 = J_x\alpha_1^2 + J_y\beta_1^2 + J_z\gamma_1^2 - 2J_{xy}\alpha_1\beta_1 - 2J_{xz}\alpha_1\gamma_1 - 2J_{yz}\beta_1\gamma_1, \quad (14)$$

Rescriem sistemul (10), care sunt verificate de $\lambda = \lambda_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$:

$$\begin{cases} (J_x - \lambda_1)\alpha_1 - J_{xy}\beta_1 - J_{xz}\gamma_1 = 0 \\ -J_{xy}\alpha_1 + (J_y - \lambda_1)\beta_1 - J_{yz}\gamma_1 = 0, \\ -J_{xz}\alpha_1 - J_{yz}\beta_1 + (J_z - \lambda_1)\gamma_1 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Înmulțim prima ecuație cu α_1 , a doua cu β_1 , a treia cu γ_1 și le adunăm:

$$J_x\alpha_1^2 + J_y\beta_1^2 + J_z\gamma_1^2 - 2J_{xy}\alpha_1\beta_1 - 2J_{xz}\alpha_1\gamma_1 - 2J_{yz}\beta_1\gamma_1 - \lambda_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = 0, \quad (16)$$

Ținând seama de (3) și comparând relațiile (16) și (14), rezultă că $\lambda_1 = J_1$. Analog se demonstrează că $\lambda_2 = J_2, \lambda_3 = J_3$. Axele corespunzătoare parametrilor λ_2 și λ_3 le vom nota cu (Δ_2) respectiv (Δ_3) .

Momentele de inerție J_1, J_2, J_3 sunt momentele principale de inerție, iar axele $(\Delta_1), (\Delta_2), (\Delta_3)$ corespunzătoare, sunt axele principale de inerție.

Concluzii

1. Cele trei axe principale de inerție formează un sistem cartezian triortogonal.

Pentru demonstrație se multiplică ecuațiile (15), respectiv cu $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ și se adună:

$$\begin{aligned} & -\lambda_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + J_x\alpha_1\alpha_2 + J_y\beta_1\beta_2 + J_z\gamma_1\gamma_2 - \\ & -J_{xy}(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - J_{yz}(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1) - J_{xz}(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) = 0' \end{aligned} \quad (17)$$

Se rescrie sistemul (10) pentru $\lambda = \lambda_2, \alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2$, se înmulțesc ecuațiile sistemului, respectiv cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ și se adună:

$$\begin{aligned} & -\lambda_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + J_x\alpha_1\alpha_2 + J_y\beta_1\beta_2 + J_z\gamma_1\gamma_2 - \\ & -J_{xy}(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - J_{yz}(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1) - J_{xz}(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) = 0' \end{aligned} \quad (18)$$

Făcând diferența relațiilor (18) și (17) rezultă:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0, \quad (19)$$

Întrucât, în general, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, relația (19) devine:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad (20)$$

Membrul din stânga relației (20) reprezintă produsul scalar al versorilor axelor (Δ_1) și (Δ_2) :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \quad (21)$$

Este evident că:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0, \quad (22)$$

adică axele (Δ_1) și (Δ_2) sunt ortogonale. Analog se demonstrează perpendicularitatea axelor (Δ_2) și (Δ_3) , respectiv (Δ_3) și (Δ_1) .

2. Axele principale de inerție care trec prin centrul de greutate al sistemului material se numesc axe principale centrale de inerție.

3. În raport cu planele determinate de axele principale de inerție, momentele de inerție centrifugale sunt nule.

4. Momentul de inerție față de o axa (Δ) , care trece prin O și care este definită prin cosinusurile directe α , β , γ în raport cu axele principale de inerție este:

$$J_\Delta = J_1\alpha^2 + J_2\beta^2 + J_3\gamma^2, \quad (23)$$

5. Dacă sistemul material este situat într-un plan (de exemplu planul xOy) atunci ecuația determinantului (11) devine:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_o - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

sau,

$$(J_o - \lambda)[\lambda^2 - (J_x + J_y)\lambda + J_x J_y - J_{xy}^2] = 0, \quad (25)$$

având rădăcinile:

$$\lambda_{1,2} = J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}; \quad \lambda_3 = J_3 = J_o, \quad (26)$$

Cunoașterea momentelor principale de inerție dă posibilitatea aflării momentelor de inerție în raport cu orice alt sistem Oxy având aceeași origine cu sistemul axelor principale și fiind rotit cu unghiul α față de acesta:

$$J_x = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha; \quad J_y = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha, \quad (27)$$

$$J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha, \quad (28)$$

Dacă sistemul material este situat în planul xOy , axa (Δ) fiind de asemenea în acest plan, înclinată cu unghiul φ față de Ox , rezultă: $z=0$, $\gamma=0$, $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\sin\varphi$, iar formula (2) devine:

$$J_\Delta = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (29)$$

Direcțiile principale, pentru care momentul de inerție devine extrem, se obțin anulând derivata în raport cu unghiul φ a expresiei J_Δ dată de (29):

$$\frac{dJ_\Delta}{d\varphi} = -2J_x \cos \varphi \sin \varphi + 2J_y \sin \varphi \cos \varphi - 2J_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0, \quad (30)$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}, \quad (31)$$

Din această relație se obțin pentru unghiul φ două valori φ_1 și φ_2 , care diferă între ele cu $\pi/2$, fapt ce demonstrează că direcțiile principale sunt perpendiculare.

Bibliografie

- [1] Roșculeț, M., N., Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973;
 [2] Bratu P., Mecanică teoretică, Editura IMPULS, București, 2004;
 [3] *** <http://www.east.utcluj.ro/mb/mep/files/titul/CAP%204.%20GEOMETRIA%20MASELOR.pdf>;

LEGEA CUTIEI NEGRE

Autori: Horia Mihai ICHIM¹, Flavius Andrei ȘTEFAN¹

ichimhoria@yahoo.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing. Răzvan Bogdan ITU², Asist.univ.dr.ing. Bogdan Ioan MARC²

¹ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I*

² *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.*

Rezumat

În lucrare sunt prezentate aspecte privind relația dintre factorii care caracterizează funcționarea oricărei mașini, relație cunoscută sub denumirea de legea cutiei negre.

Cuvinte cheie

Lege, cutie neagră

1. Introducere

O cutie neagră sau o cutie opacă este reprezentarea unui sistem fără a lua în considerare funcționarea sa internă (fie că este un obiect mecanic sau electronic, un organism, o persoană, un mod de organizare socială sau orice alt sistem).

Această funcționare internă este fie inaccesibilă (care pare a fi utilizarea principală, care rămâne comună), fie omisă în mod deliberat (este apoi un instrument teoretic care face posibilă alegerea studiului exclusiv al schimburilor externe). Funcționarea cutiei negre este înțeleasă deci doar din unghiul interacțiunilor sale.

Caseta neagră este reprezentată într-un mod de bază prin afișarea intrărilor și ieșirilor, dar ascunzând funcționarea internă. Totul poate fi reprezentat sub forma unei cutii negre: un tranzistor, un algoritm, o rețea precum Internetul, funcționarea unei companii sau relațiile umane în cadrul unui grup.

Opusul unei cutii negre, numită cutie albă, este un sistem ale cărui mecanisme sunt vizibile și fac posibilă înțelegerea modului lor de funcționare.

Termenul de cutie neagră se poate referi la: cutie neagră, în aeronautică, de fapt două cutii metalice de culoare portocalie, dintre care una conține „înregistratorul de date de zbor” și cealaltă „înregistratorul de voce și zgomot din cabină”; cutie neagră, în domeniul maritim, desemnând un înregistrator de date de călătorie; cutie neagră, pentru automobile, care indică un înregistrator de date de călătorie; în programarea computerelor și ingineria software, testul cutiei negre este utilizat pentru a testa un program; cutia neagră, reprezentarea unui sistem fără a lua în considerare funcționarea sa internă (fie că este un obiect mecanic sau electronic, un organism, o persoană, un mod de organizare socială sau orice alt sistem); cutie neagră, în teatru, o cameră goală și neutră, complet flexibilă pe placul artiștilor (locația publicului, amenajarea scenei), spre deosebire, de exemplu, de o cameră în stil italian ;

În cele ce urmează se vor prezenta aspecte privind relația cunoscută sub denumirea de legea cutiei negre.

2. Legea cutiei negre

Legea cutiei negre, este denumirea sub care este cunoscută relația dintre cei trei factori care caracterizează funcționarea oricărei mașini (raportul de transmitere al vitezelor λ_v , raportul de transmitere al forțelor λ_F și randamentul η). Această denumire are ca justificare faptul că atât valorile celor trei factori menționați cât și expresia relației dintre ei se poate determina considerând mașina respectivă ca o „cutie neagră”, adică o cutie în interiorul căreia nu se poate observa nimic. Din această cutie ies la cele două extremități ale sale două corpuri, spre exemplu, două axe asupra cărora se aplică forța motoare, viteza sau deplasarea motoare, lucrul mecanic sau puterea motoare respectiv forța utilă, viteza sau deplasarea utilă, lucrul mecanic sau puterea utilă. Atât factorii de transmitere a forței cât și factorul de transmitere a vitezelor se poate determina pe cale experimentală fără a se demonta cutia neagră în care se află mașina respectivă; dacă se cunoaște structura mașinii ei, se pot calcula respectiv din studiul echilibrului și din analiza cinematică. Se știe că:

$$F_m = \lambda_F F_u; \quad v_m = \lambda_v v_u; \quad P_m = \frac{1}{\eta} P_u$$

Ținând seama de relațiile:

$$P_m = F_m v_m; \quad P_r = F_r v_r; \quad P_u = F_u v_u$$

rezultă:

$$\eta \lambda_F \lambda_v = 1, \quad (1)$$

Se poate spune că pentru orice mașină *produsul dintre factorul de transmitere a forței, factorul de transmitere a vitezei și randamentul unei mașini este egal cu unitatea.*

Aceasta constituie exprimarea legii cutiei negre. Ea este o lege generală care guvernează toate mașinile indiferent de natura lor; desigur această lege se referă la acele mașini la care intră în joc numai elementele mecanice (forțe, cupluri, putere mecanică și lucru mecanic). Ea poate fi formulată în mod corespunzător și pentru alte cazuri.

Se consideră cazul particular al unei mașini ideale între elementele căreia nu există deci frecări sau cazul unei

mașini reale între elementele căreia există frecări mici, care pot fi neglijate. În acest caz $\eta=1$ și legea cutiei negre devine:

$$\lambda_F \lambda_v = 1, \quad (2)$$

sau, ceea ce este totuna:

$$\lambda_F = \frac{1}{\lambda_v}, \quad (3)$$

Enunțul acestui caz particular al legii cutiei negre este următorul: *La o mașina fără frecări raportul de transmitere al forțelor este egal cu inversul raportului de transmitere a vitezelor.*

Această lege era cunoscută încă din antichitate sub denumirea de „legea de aur a mecanicii” și era exprimată în modul următor: „Ce se câștigă în forță se pierde în viteză și invers”. Această exprimare corespunde întrutotul realității; într-adevar, dacă se observă factorii de transmitere a forței și vitezei în cazul; pârgheii fără frecări, se constată că aceștia sunt unul inversul celuilalt. Aceasta înseamnă că cu cât se va micșora raportul de transmitere a forțelor cu atât se va putea învinge o forță rezistentă mai mare cu o forță motoare mai mică, dar tot cu atât punctul de aplicare al forței motoare va parcurge un drum mai lung decât drumul parcurs de punctul de aplicație al forței rezistente, adică ceea ce s-a câștigat în mișcare se pierde prin aceea că va trebui să se deplaseze punctul de aplicare al forței motoare pe un drum mai lung.

3. Exemple de aplicații în care se folosește legea cutiei negre

Exemplul 1. Prin aplicarea legii cutiei negre se cere să se determine randamentele planului înclinat și a șurubului de presă.

Rezolvare:

a) Din figura 1 se deduce:

$$d_u = d_m \sin \alpha, \text{ și deci } \lambda_v = \lambda_d = \frac{d_m}{d_v} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

Raportul de transmitere a forțelor este:

$$\lambda_F = \frac{F_m}{F_u} = \sin \alpha + \mu \cos \alpha = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi},$$

în care $\varphi = \text{arc tg } \mu$ este unghiul de frecare.

Aplicând legea cutiei negre se obține:

$$\eta = \frac{1}{\lambda_F} \cdot \frac{1}{\lambda_v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)},$$

b) Pentru șurubul de presă se cunosc următoarele (fig. 2, a și b):

$$v_u = \frac{p \omega_m}{2\pi}; \quad M_m = F_u r \text{tg}(\alpha + \varphi),$$

în care p este pasul, r - raza șurubului, α - unghiul de înclinare.

Rezultă:

$$\lambda_F = \frac{M_m}{F_u} = r \text{tg}(\alpha + \varphi); \quad \lambda_v = \frac{\omega_m}{v_u} = \frac{2\pi}{p},$$

cu care

$$\eta = \frac{1}{\lambda_F} \cdot \frac{1}{\lambda_v} = \frac{p}{2\pi r \text{tg}(\alpha + \varphi)},$$

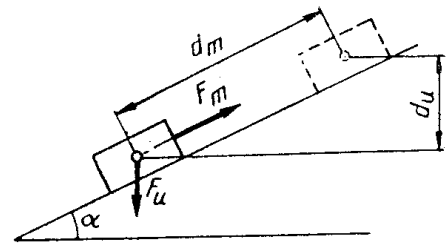


Fig. 1. Planul înclinat

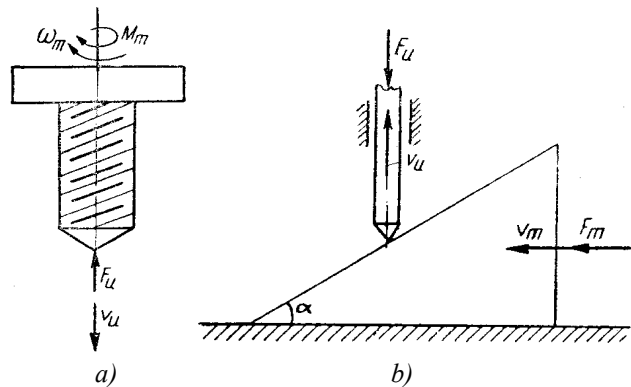


Fig. 2. Șurubul

Exemplul 2. Se consideră un mecanism alcătuit din mai multe corpuri supuse la legături cu frecare și acționat în principal de două forțe: forța motoare F_m și forța rezistentă F_r , acțiunea oricăror alte forțe fiind neglijabilă.

Raportul de transmitere al forțelor λ_F depinde de coeficienții de frecare $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ din legăturile mecanismului precum și de o serie de mărimi geometrice constante sau variabile notate simbolic cu A :

$$\lambda_F = \lambda_F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, A),$$

1) Se cere să se arate că randamentul mecanismului considerat se poate calcula cu relația:

$$\eta = \frac{\lambda_F(0, 0, \dots, 0, A)}{\lambda_F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, A)},$$

2) Să se verifice acest rezultat calculând randamentul mecanismului din figura 3.

Rezolvare:

1) Din definiția randamentului rezultă:

$$\eta = \frac{P_{utila}}{P_{consumata}} = \frac{F_r v_r}{F_m v_m} = \frac{1}{\lambda_F} \cdot \frac{1}{\lambda_v},$$

(1) λ_v reprezentând raportul de transmitere a vitezelor; v_r și v_m - reprezentând respectiv măsurile

proiecțiilor vitezelor punctelor de aplicație ale forței motoare și forței rezistente pe direcțiile acestora unde $\lambda_F = \lambda_F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, A)$. În expresia lui λ_v nu apar decât mărimile geometrice A intrucit λ_v se deduce pe cale cinematică: $\lambda_v = \lambda_v(A)$.

Paricularizind relația de mai sus pentru cazul aceluiași mecanism fără frecări, caz pentru care mărimile de mai sus se notează respectiv cu η' , λ'_F și λ'_v , se obține:

$$\eta' = \frac{1}{\lambda'_F} \cdot \frac{1}{\lambda'_v},$$

Dar în acest caz:

$$\eta' = 1, \quad \lambda'_F = \lambda_F(0, 0, \dots, 0, A), \quad \lambda'_v = \lambda_v,$$

și deci:

$$\eta' = \frac{1}{\lambda_F(0, 0, \dots, 0, A)} \cdot \frac{1}{\lambda_v},$$

sau

$$\lambda_v = \frac{1}{\lambda_F(0, 0, \dots, 0, A)},$$

care înlocuit cu (1) conduce la:

$$\eta = \frac{\lambda_F(0, 0, \dots, 0, A)}{\lambda_F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, A)},$$

2) *Cazul exemplului considerat*

a) *Calculul randamentului pe calea obișnuită.* Pentru aceasta se folosește relația (1)

$$\eta = \frac{1}{\lambda_F} \cdot \frac{1}{\lambda_v},$$

Calculul lui λ_F . Pentru aceasta se face analiza statică a mecanismului (repaus sau mișcare uniformă); rezultă din figura 4:

$$\begin{aligned} \text{Corpul 1} & \begin{cases} \sum X = 0; & \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \cos \alpha - F_m + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = 0; & N_1 + \mu_2 N_2 \sin \alpha - N_2 \cos \alpha = 0 \end{cases} \\ \text{Corpul 2} & \begin{cases} \sum X = 0; & N_3 - N_4 - \mu_2 N_2 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = 0; & -F_r - \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4 - \mu_2 N_2 \sin \alpha + N_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum M_A = 0; & N_4(a+b) - N_3 b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Între cele cinci ecuații trebuie eliminate patru mărimi N_1 , N_2 , N_3 și N_4 , și rămâne relația $F_m = \lambda_F F_r$. Ecuațiile de la corpul 1 constituie un sistem în N_1 și N_2 .

$$\begin{aligned} \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 (\cos \alpha + \sin \alpha) &= F_m \\ N_1 + \mu_2 N_2 (\sin \alpha - \cos \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\mu_2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha (\mu_1 \mu_2 - 1) - \cos \alpha (\mu_1 + \mu_2)} F_m \\ N_2 &= \frac{N_1}{\cos \alpha - \mu_2 \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) + \sin \alpha (1 - \mu_1 \mu_2)} F_m \end{aligned}$$

Din ultima ecuație de la corpul 2 rezultă:

$$N_4 = \frac{b}{a+b} N_3$$

Din prima ecuație de la corpul 2 rezultă:

$$N_3 = \frac{(a+b)(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha)}{a[\cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) + \sin \alpha (1 - \mu_1 \mu_2)]} F_m$$

cu care

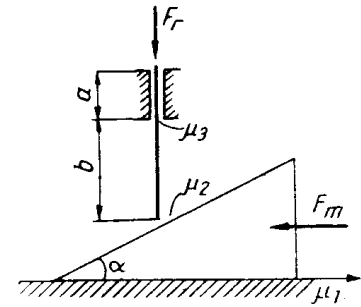


Fig. 3. Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă de translație (întregul sistem).

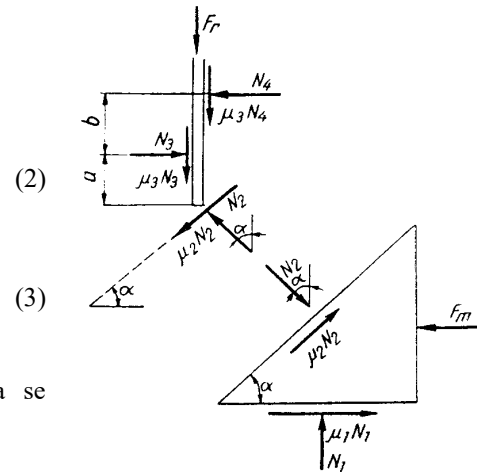


Fig. 4. Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă de translație (corpurile izolate)

$$N_4 = \frac{b}{a+b} N_3 = \frac{b(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha)}{a[\cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) + \sin \alpha (1 - \mu_1 \mu_2)]} F_m,$$

Din cea de a doua ecuație de la corpul 2 rezultă:

$$F_r = N_2 (\cos \alpha - \mu_2 \sin \alpha) - \mu_3 (N_3 + N_4),$$

Rezultă în final:

$$\lambda_F = \frac{F_m}{F_r} = \frac{a[\cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) + \sin \alpha (1 - \mu_1 \mu_2)]}{a(\cos \alpha - \mu_2 \sin \alpha) - \mu_3 (a + 2b)(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha)},$$

Notând:

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \varphi_1; \quad \mu_2 = \operatorname{tg} \varphi_2; \quad \mu_3 = \operatorname{tg} \varphi_3,$$

acest rezultat se mai poate pune și sub forma:

$$\lambda_F = \frac{F_m}{F_r} = \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_1} \frac{\sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\alpha + \varphi_2 + \varphi_3) - 2 \frac{b}{a} \sin \varphi_3 \sin(\alpha + \varphi_2)},$$

Calculul lui λ_v . Pentru aceasta se efectuează analiza cinematică a mecanismului; și se obține din figura 5:

$$\lambda_m = \frac{v_m}{v_r} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

Rezultă:

$$\eta = \frac{1}{\lambda_F} \cdot \frac{1}{\lambda_v} = \frac{a(\cos \alpha - \mu_2 \sin \alpha) - \mu_3 (a + 2b)(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha)}{a[\cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) + \sin \alpha (1 - \mu_1 \mu_2)]} \operatorname{tg} \alpha,$$

respectiv,

$$\eta = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_3} \frac{\cos(\alpha + \varphi_2 + \varphi_3) - 2 \frac{b}{a} \sin \varphi_3 \sin(\alpha + \varphi_2)}{\sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2)} \operatorname{tg} \alpha,$$

Verificarea constă în a arăta valabilitatea relației (2); de unde rezultă:

$$\lambda_F(0, 0, \dots, 0, A) = \frac{a \sin^2 \alpha}{a \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\lambda_v}.$$

Concluzii

Legea de aur se aplică numai în cazul echilibrului sau a mișcării uniforme de mașini simple.

Studiul se concentrează pe valorile ieșirilor în funcție de valorile intrărilor. Caracteristicile studiate sunt, în general, întârzierea, câștigul.

De asemenea, o reprezentare simplă a conceptului de sistem, în știință și inginerie, poate fi imaginată ca o "cutie neagră" (engleză black box), considerată numai în termenii intrărilor (input-uri), ieșirilor (output-uri) și funcției sistemului sau procesului efectuat în sistem.

Bibliografie

- [1]. Atanasiu M., "Mecanică" Eitura Didactică și Pedagogică. București, 1973;
- [2] *** [https://ro.frwiki.wiki/wiki/Bo%C3%A0Ete_noire_\(syst%C3%A8me\)](https://ro.frwiki.wiki/wiki/Bo%C3%A0Ete_noire_(syst%C3%A8me))
- [3] *** https://ro.frwiki.wiki/wiki/Bo%C3%A0Ete_noire
- [4] *** https://ro.wikipedia.org/wiki/Modelul_unui_sistem

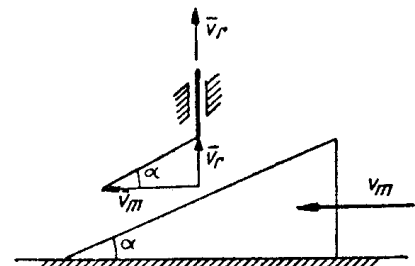


Fig. 5. Transmiterea vitezelor la mecanismul cu camă de translație

UTILIZAREA SOFT-URILOR 3D LA STUDIUL ELEVATORULUI ELECTROMECHANIC CU DOUĂ COLOANE PENTRU AUTOTURISME

Autori: Rădescu Elena-Georgiana, Zamfir Bogdan-Eduard ¹

Coordonator: Conf. univ. dr. ing. **Bogdan Zeno COZMA** ²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Concepție și fabricație asistată de calculator, anul I

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E, Departamentul I.M.I.T.

Rezumat

În cazul elevatoarelor este foarte important să alegeți tipul care se potrivește cel mai bine aplicației dorite. Elevatorul electromecanic cu două coloane, la care transmisia mișcării de la o coloană la cealaltă se face printr-un lanț cu role și zale scurte tip 10A (5/8”), iar deplasarea suportului cu brațe pe coloana este realizată de un mecanism șurub-piuliță Tr 44x7.

Cuvinte cheie

Elevator electro-hidraulic, Calculul economic, software 3D.

1. Considerații generale despre elevatoarele din service-auto

Creșterea exponențială a volumului importurilor de autoturisme și autocamioane din ultimii ani precum și creșterea nivelului tehnologic al autovehiculelor din ziua de azi au generat și evoluția pieței de echipamente de service-auto.

Dacă în anii 1995-2000 vârful de vânzări în acest domeniu a fost generat de acordarea legislației românești la normele europene pentru ITP (Inspekția Tehnică Periodică), la acesta dată se realizează recorduri de vânzări pentru dotarea service-urilor auto, în special cele de marca.

Principalele categorii de echipamente de service-auto sunt : elevatoare; echipamente de mecanica generală, scule, testere și utilități: aer comprimat, lubrifianți, exhaustoare; echipamente de service-roți; standuri de reglaj direcție; echipamente pentru linia de Inspekție Tehnică Periodică (ITP); utilaje și scule de tinichigerie; cabina de vopsit și echipamente pentru atelierul de vopsitorie; echipamente de curățat și pentru dotarea spălătoriei auto.

În cazul elevatoarelor este foarte important să alegeți tipul care se potrivește cel mai bine aplicației dorite. Există elevatoare cu o coloană (fig.1,a), cu 2 coloane (fig. 1,b) și cu 4 coloane (fig. 1,c), foarfecă și îngropate.

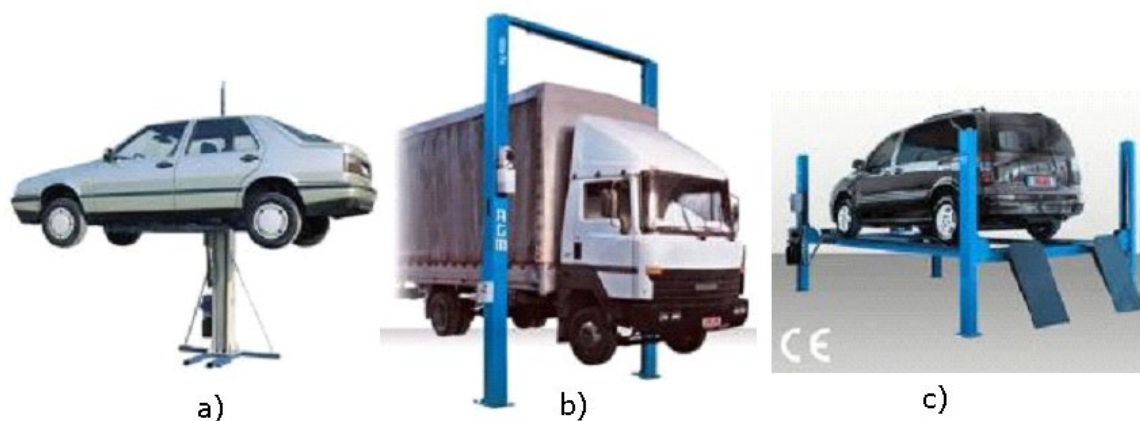


Fig. 1. Elevatoare electrohidraulice cu una, două și patru coloane

Elevatoarele cu 2 coloane pot fi electromecanice sau hidraulice. Elevatoarele electromecanice pot fi acționate de un motor și cu o transmisie către cealaltă coloana prin lanț sau prin cardan, sau pot fi acționate de 2 motoare având sincronizarea electromecanică sau electronică. Elevatoarele electromecanice uzuale au sarcina utilă de 2,5 – 3,2 tone, iar excepțiile au 3,5 - 5 tone. Ele sunt și cele mai folosite în Europa unde parcul auto se pretează acestor elevatoare.

2. Construcția și funcționarea elevatorului cu două coloane

În figura 2 este prezentată soluția constructivă a elevatorului electromecanic cu două coloane, la care transmisia mișcării de la o coloană la cealaltă se face printr-un lanț cu role și zale scurte tip 10A (5/8”), iar deplasarea suportului cu brațe pe coloana este realizată de un mecanism șurub-piuliță Tr 44x7.

Caracteristicile tehnice ale elevatorului sunt date în tabelul 1.

Tabelul 1. Caracteristicile tehnice ale elevatorului

Nr. crt.	Denumire caracteristică	U. M.	Valoare
1.	Masa portantă	kg	2000
2.	Înălțimea maximă de ridicare	mm	2000
3.	Timpul de ridicare	sec	47
4.	Distanța între brațele celor două coloane	mm	2250
5.	Lungimea brațului telescopic mic – închis - deschis	mm mm	550 850
6.	Lungimea brațului telescopic mare – închis - deschis	mm mm	925 1400
7.	Unghiul de rotire al brațelor	grade	105
8.	Înălțimea talpei	mm	50
8.	Puterea motorului de acționare	kW	3
9.	Dimensiuni de gabarit – lungime - lățime - înălțime	mm mm mm	3000 1090 2495
10.	Masa elevatorului	kg	800
11.	Calitatea minimă a betonului	-	B250
12.	Grosimea minimă a vetrei din beton B250	mm	180

După poziționarea autoturismului între cele două coloane și a suportilor din cauciuc a brațelor în punctele de ridicare a autoturismului se pornește motorul electric de pe coloana 2, care printr-o transmisie prin patru curele trapezoidale înguste SPZ 8,5x1000 rotește tija filetată Tr 44x7 (Detaliu C). La capătul inferior al tijeii filetate, în interiorul talpei 1, este montată roata de lanț, care printr-un lanț cu role și zale scurte 10A transmite mișcarea de rotație la tija filetată din coloana 3.

Talpa elevatorului este în construcție sudată, fiind realizată din profil U100, având la exterior câte patru urechi cu orificii de $\Phi 25$ la fiecare capăt, pentru fixare pe fundație sau vatra din beton.

Cele două coloane sunt construite din profil H180B fixate prin sudare pe plăcile de bază, care se montează pe talpa elevatorului prin câte cinci șuruburi M16x65 asigurate cu șaibe Grower (7, 8) fiecare. Pe capătul superior se montează prin patru șuruburi M12x35 placa de capăt superioară pe care se află bucușă în care se montează rulmentul axial cu bile 51207 și rulmentul radial cu bile 6007, ce poziționează capătul superior al tijeii filetate (Detaliu D).

Pe capătul superior al tijeii filetate de pe coloana cu motor 2 se montează prin pană roata mare de curea cu ajutorul a două piulițe M30. La capătul inferior al tijeii filetate, în placa de bază, se află montat un rulment radial cu bile 6006 și roata de lanț, care este montată prin pană și fixată cu inel elastic de siguranță.

Pe interiorul aripilor profilului H180B se găsesc montate două rigle de ghidare, prin 4 știfturi de centrare $\Phi 8 \times 35$ și 23 de șuruburi M12x35. Pe aceste rigle de ghidare culisează suportul brațelor 4 cu ajutorul unei piulițe Tr 44x7 montată între ghidajele și umărul de sprijin al suportului. Între piuliță și umărul suportului brațelor se găsește o piesă cu suprafață sferică pentru autoașezarea suportului pe piuliță în cazul încărcării dezechilibrate a suportului brațelor și a jocului dintre patinele suportului și riglele de ghidare. Piulița și patinele suportului sunt confecționate din bronz turnat.

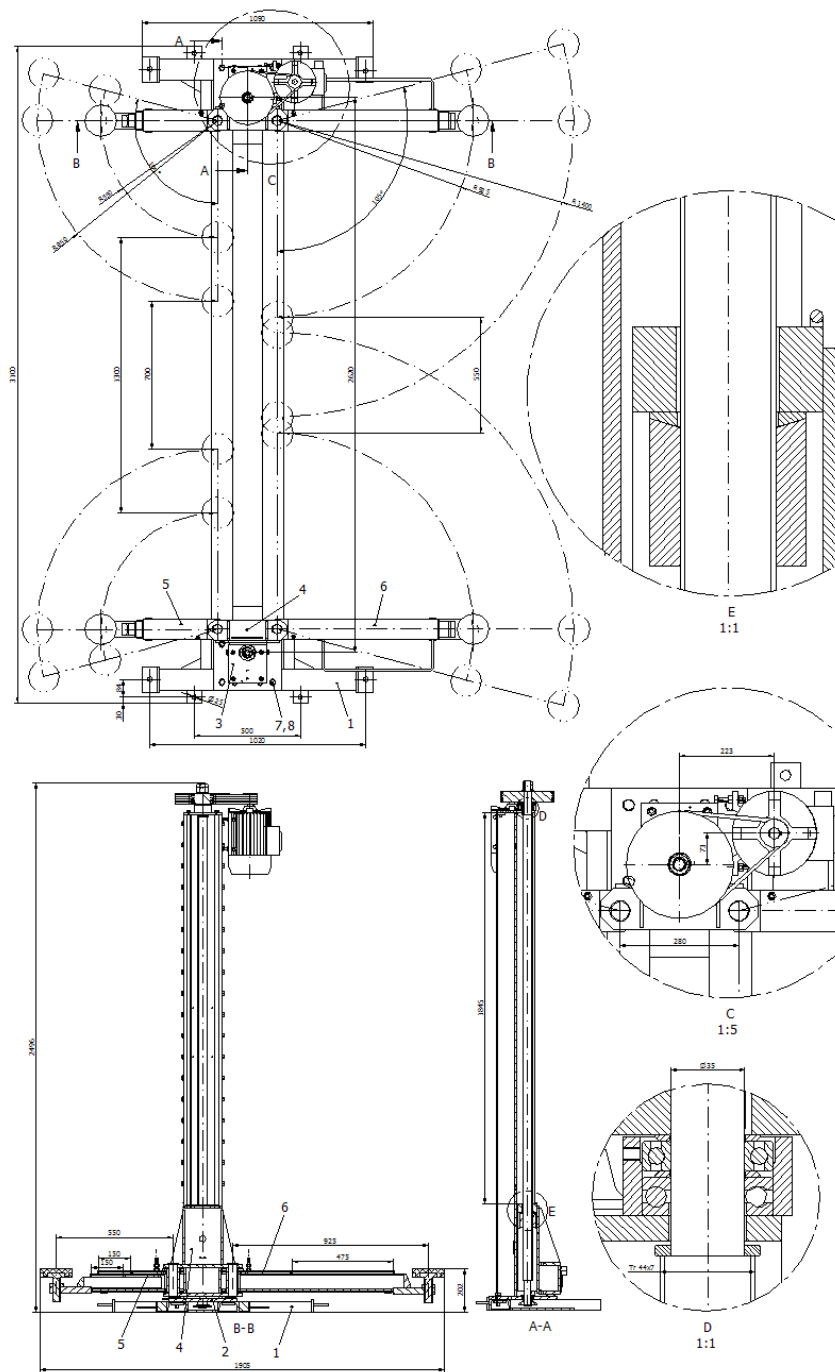


Fig. 2. Elevatorul electromecanic cu două coloane

Cu ajutorul celor două bolțuri $\Phi 40 \times 155$ se montează cele două brațe telescopice mic și mare. Brațul telescopic mic 5 este compus din trei tronsoane de țevă pătrată de $100 \times 100 \times 6,3$, $80 \times 80 \times 5,6$ și $60 \times 60 \times 5$, care culisează una în cealaltă pe lungimii de 150 mm. La capătul brațului se găsește suportul cu tijă filetată M36 și capac din cauciuc, care permite o reglare fină pe înălțime a brațelor opuse.

Brațul telescopic mare 6 este compus din două tronsoane de țevă pătrată de $100 \times 100 \times 6,3$ și $80 \times 80 \times 5,6$, care culisează una în cealaltă pe o lungime de 475 mm.

Montarea și întinderea curelelor trapezoidale se face cu ajutorul celor 4 șuruburi M10x65 pe care se află montat motorul electric.

Montarea și întinderea lanțului cu role și zale scurte 10A se face prin deplasarea coloanei 3 pe talpa elevatorului cu ajutorul celor 5 șuruburi M16x65 de fixare a coloanei.

Cu ajutorul soft-ului Solid Edge a fost realizată modelarea 3D a elevatorului electromecanic cu două coloane și a ansamblurilor acestuia, care sunt prezentate în figura 3, 4, 5 și 6.

Pentru obținerea autorizației de funcționare a unui elevator auto și exploatarea acestuia conform prescripției tehnice PT R5-2003, beneficiarul trebuie să aibă în cadrul firmei un operator RSVTI, persoană fizică sau firmă autorizată de către ISCIR-INSPECT IT să presteze o asemenea activitate, iar operarea elevatorului va fi efectuată de către o persoană autorizată.

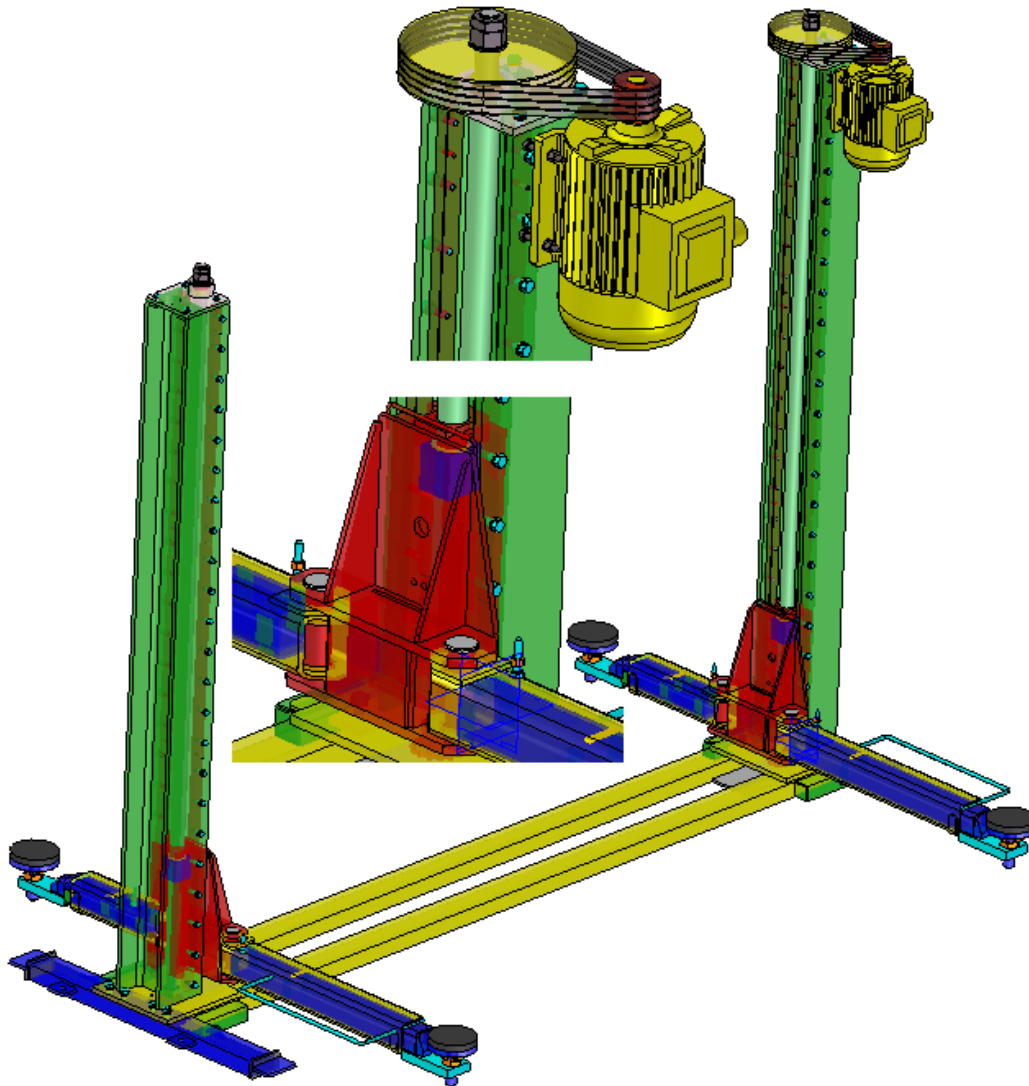


Fig. 3. Modelul 3D al elevatorului electromecanic cu două coloane

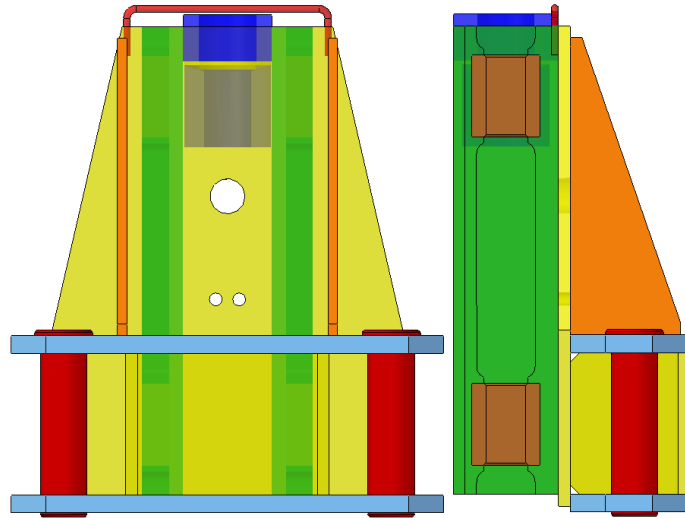


Fig. 4. Modelul 3D al suportului brațelor

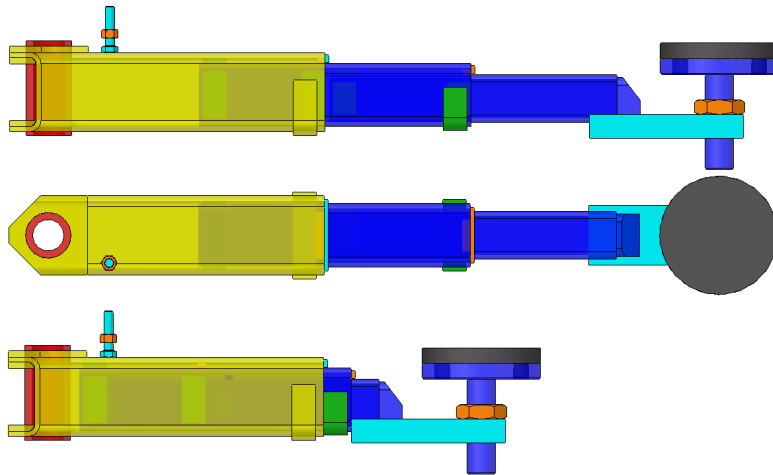


Fig. 5. Modelul 3D al brațului telescopic mic

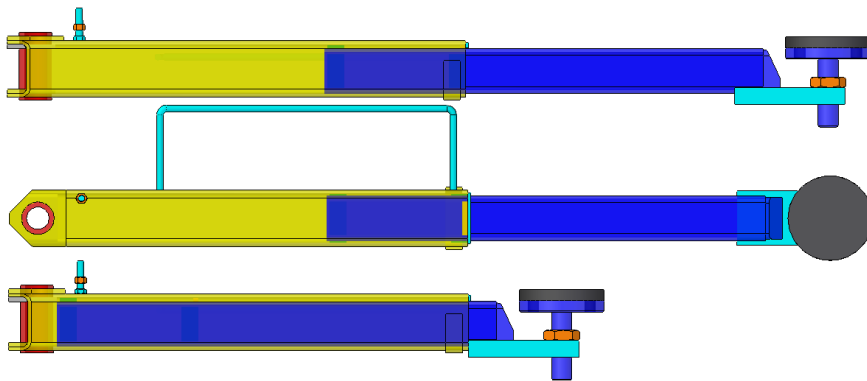


Fig. 6. Modelul 3D al brațului telescopic mare

3. Verificarea de rezistență a brațelor elevatorului

Cu ajutorul programului COSMOSDesignSTAR 4.0 s-a realizat o analiză statică

lineară a brațelor telescopice ale elevatorului la solicitările statice maxime.

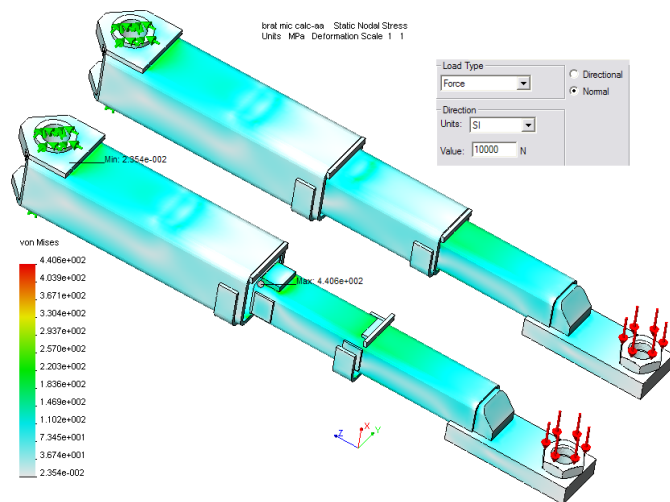


Fig. 7. Modul de variație a tensiunii echivalente în brațul telescopic mic

maximă în brațul plăcuței de în rest nu de 168,3 mai mare determinată 131,286 MPa.

4.

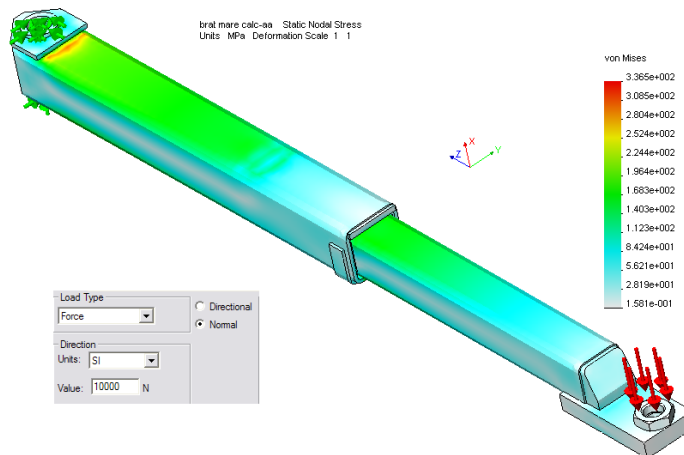


Fig. 8. Modul de variație a tensiunii echivalente în brațul telescopic mare

exponențială importurilor autocamioane

precum și creșterea nivelului tehnologic al autovehiculelor din ziua de azi au generat și evoluția pieței de echipamente de service-auto.

În cazul elevatorelor este foarte important să alegeți tipul care se potrivește cel mai bine aplicației dorite. Elevatorul electromecanic cu două coloane, la care transmisia mișcării de la o coloană la cealaltă se face printr-un lanț cu role și zale scurte tip 10A (5/8”), iar deplasarea suportului cu brațe pe coloana este realizată de un mecanism șurub-piuliță Tr 44x7, prezintă următoarele avantaje:

- deservește o plajă largă de autoturisme, cele cu masa sub 2000 kg;
- are o construcție relativ simplă și se comandă ușor;
- are dimensiuni de gabarit reduse și poate montat ușor în atelier;
- costurile de achiziție și de mentenanță sunt mici;

5. Bibliografie

1. Buzdugan, Gh. – *Rezistența materialelor*, Editura Tehnică, București, 1979.

În fig. 7 este prezentat modul de variație a tensiunii echivalente pentru solicitare a brațului telescopic mic cu o sarcină de 10 000 N, se observă că valoarea maximă (440,6 MPa) apare în brațul intermediar în zona plăcuței de ghidare superioară, iar în rest nu depășește valoarea de 220 MPa, care este mai mare decât cea determinată prin calcul 161,84 MPa.

În fig. 8 este prezentat modul de variație a tensiunii echivalente pentru solicitare a brațului telescopic mare cu o sarcină de 10 000 N, se observă că valoarea

(336,5 MPa) apare suport în zona fixare a bușei, iar depășește valoarea MPa, care este decât cea prin calcul

Concluzii

Creșterea a volumului de autoturisme și din ultimii ani

2. Mănescu, T. Șt., ș.a. – *Analiză structurală prin metoda elementului finit*, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2005.
3. Muscă G. – *Proiectarea asistată folosind Solid Edge*, Editura Junimea, Iași, 2006.

STUDIUL ADAPTĂRII FIXĂRII CAPETELOR LANȚULUI MECANISMULUI DE AVANS AL COMBINEI 2K-52MU LA STAȚIILE TRANSPORTORULUI CU RACLETE TR-5 UTILIZÂND SOFTURLE CAD/CAE

Autori: Lupu Marius, Răuț Dumitru-Valentin ¹

Coordonator: Conf. univ. dr. ing. **Bogdan Zeno COZMA** ²

¹ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Concepție și fabricație asistată de calculator, anul II*

² *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E, Departamentul I.M.I.T.*

Rezumat

Problema principală de adaptare a celor două utilaje a constat în proiectarea și realizarea unor sisteme de prindere a capetelor lanțului mecanismului de avans al combinei de stațiile de acționare și de întoarcere ale transportorului cu raclete TR-5. În rezolvarea acestei probleme s-a urmărit ca toate elementele sistemelor de prindere a capetelor lanțului combinei să reziste la forța maximă de tractare a combinei de 250 kN, iar această solicitare să nu fie transmisă construcției metalice a stațiilor și să fie preluată de stâlpul hidraulic de ancorare a stației transportorului.

Cuvinte cheie

Combină de abataj 2K-52MU, transportor cu raclete TR-5, software CAD/CAE.

1. Introducere

Necesitatea mecanizării exploatării cărbunelui în minele din Vale Jiului, în condițiile crizei economice actuale, a impus adaptarea utilajelor existente la noile condiții de rețehnologizare a unor abataje. Astfel, în cadrul programului de rețehnologizare a unui abataj frontal din cadrul E. M. Lonea s-a impus adaptarea combinei de abataj 2K-52MU la transportorul cu raclete TR-5. Problema principală de adaptare a celor două utilaje a constat în proiectarea și realizarea unor sisteme de prindere a capetelor lanțului mecanismului de avans al combinei de stațiile de acționare și de întoarcere ale transportorului cu raclete TR-5. În rezolvarea acestei probleme s-a urmărit ca toate elementele sistemelor de prindere a capetelor lanțului combinei să reziste la forța maximă de tractare a combinei de 250 kN, iar această solicitare să nu fie transmisă construcției metalice a stațiilor și să fie preluată de stâlpul hidraulic de ancorare a stației transportorului.

Caracteristicile tehnice ale combinei de abataj 2K-52MU nu au fost corelate cu ale transportorului cu raclete TR-5, mai ales că acesta nu a fost conceput pentru abataj, și au fost proiectate și realizate de firme diferite din țări diferite. Dar cele două utilaje sunt compatibile, cel puțin din următoarele puncte de vedere:

- mai mult de jumătate din capacitatea teoretică de tăiere a combinei, care nu este atinsă în practică datorită corelării vitezei de avans cu condițiile geologo-miniere, poate fi suportată de către transportorul cu raclete;
- dimensional, combina poate fi montată pe transportor prin adoptarea de modificări corespunzătoare, adaptarea stațiilor de TR-5 la jgheaburi de TR-6 cu folosirea lateralelor de TR-7A și modificarea păpușilor combinei, fără a diminua caracteristicile de rezistență ale acestora;
- construcția robustă a transportorului suportă masa de circa 12 ... 14 tone a combinei;
- construcția transportorului cu raclete permite încărcarea în bune condiții a cărbunelui

de către tamburii melcați.

Principala necorelare dintre cele două utilaje constă în faptul că stațiile de acționare și de întoarcere ale transportorului cu raclete TR-5 sunt prevăzute cu plăci/urechi de prindere a dispozitivului de legare a capătului lanțului de tracțiune a combinei.

2. Sistemul de legare la stația de acționare

În figura 1 este prezentată soluția constructivă de amplasare a sistemului de legare a capătului lanțului calibrat cu zale 26x92 al mecanismului de avans al combinei 2K-52MU, reper 2, la construcția metalică a stației de acționare, reper 1.

Soluția constructivă a sistemului de legare este prezentat în figura 2, care se compune din: 1 – ureche fixată pe stație; 2 – placă laterală de legătură; 3 – placă laterală de blocare; 4 – bolț de blocare $\Phi 50$; 5 – bolț de blocare $\Phi 60$; 6 – bolț articulație $\Phi 60$; 7 – ureche dispozitiv; 8 – tijă de tractare; 9 – inel de uzură; 10 – suport inel de uzură; 11 – bridă fixare lanț; 12 – știft de centrare; 13 – lanț calibrat cu zale 26x92; 14 – șurub M20x100; 15 – șurub M10 pentru ungere; 16 – inel distanțier; 17 – piuliță M42 joasă; 18 – piuliță M42; 19 – șurub M24x100.

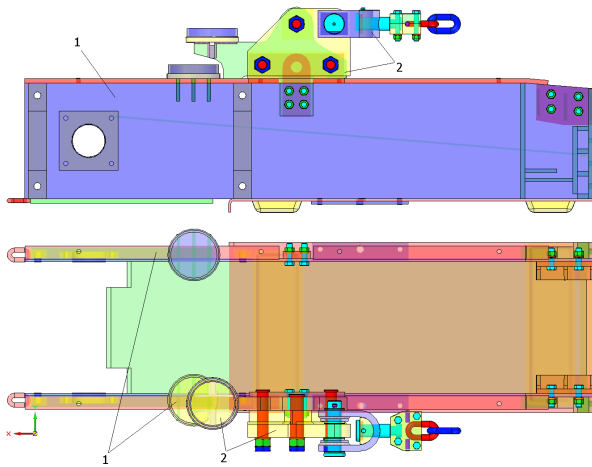


Fig. 1. Modul de amplasare al sistemului de legare pe stația de acționare [3]

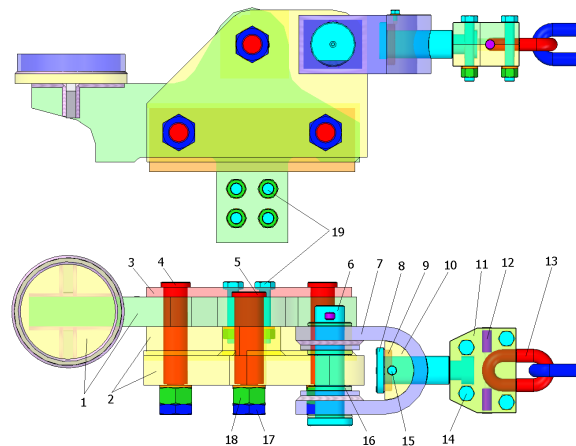


Fig. 2. Soluția constructivă a sistemului de legare a capătului lanțului pe stația de acționare TR-5 [3]

Sistemului de legare a capătului lanțului pe stația de acționare TR-5 prezintă următoarele îmbunătățiri constructive:

- urechea care se fixează pe stație, în locul urechii de ridicare, se sprijină pe rama stației prin două tălpi distanțate și are propriul suport pentru stâlpul hidraulic SVJ de ancorare a stației, ceea ce îmbunătățește stabilitatea urechii și modul de transmitere a forțelor la stație;
- prin suprapunerea suporturilor pentru stâlp se evită greșirea amplasării stâlpului de ancorare și permite interschimbabilitatea stației de acționare;
- prin poziționarea paralelă a plăcii laterale de legătură, reper 2 (fig. 2), și fixarea rigidă pe ureche prin cele trei bolțuri $\Phi 50$, reper 4, și $\Phi 60$, reper 5, s-a realizat o deplasare spre exterior a axei lanțului cu 120 mm ceea ce a îmbunătățit deplasarea combinei pe transportor în zona stației de acționare;
- s-a micșorat distanța între aripile urechii dispozitivului, reper 7, prin sudarea la interior a două plăci de adaus cu grosimea de 20 mm, care a îmbunătățit modul de solicitare a bolțului articulației, reper 6;

- a fost înlocuit rulmentul axial cu bile 51112 cu un inel de uzură din fontă sau bronz, reper 9, cu rolul de a prelua răsucirile din lanț, și a fost prevăzut un șurub, reper 15, pentru ungerea suprafeței de contact dintre inelul de uzură și suportul inel, reper 10;

- au fost prevăzute știfturi transversale, reper 12, pentru centrarea celor două bride în vederea îmbunătățirii modului de transmitere a forței de tractare între tija de tractare, reper 8, și zala lanțului, reper 13;

- s-au folosit doar table cu grosimea de 20 mm și 60 mm, care se găseau pe stoc la E.M. Lonea.

Pe baza soluției constructive din figura 2 a fost întocmit modelul de calcul cu dimensiunile constructive în vederea verificării dimensionale a elementelor acestuia, care este prezentat în figura 3, unde s-au notat: 1 - peretele stației de acționare; 2 – ureche fixată pe stație; 3 - ureche dispozitiv; 4 – bolț articulație $\Phi 60 \times 270$; 5 - inel distanțier; 6 – inel de uzură; 7 – suport inel de uzură; 8 - tijă de tractare $\Phi 57 \times 200$; 9 - bridă; 10 - șurub $M20 \times 100$; 11 – știft de centrare $\Phi 20 \times 45$; 12 - șurub $M24 \times 100$; 13 – placă laterală de legătură; 14 – bolț de blocare $\Phi 60$; 15 – bolț de blocare $\Phi 50$.

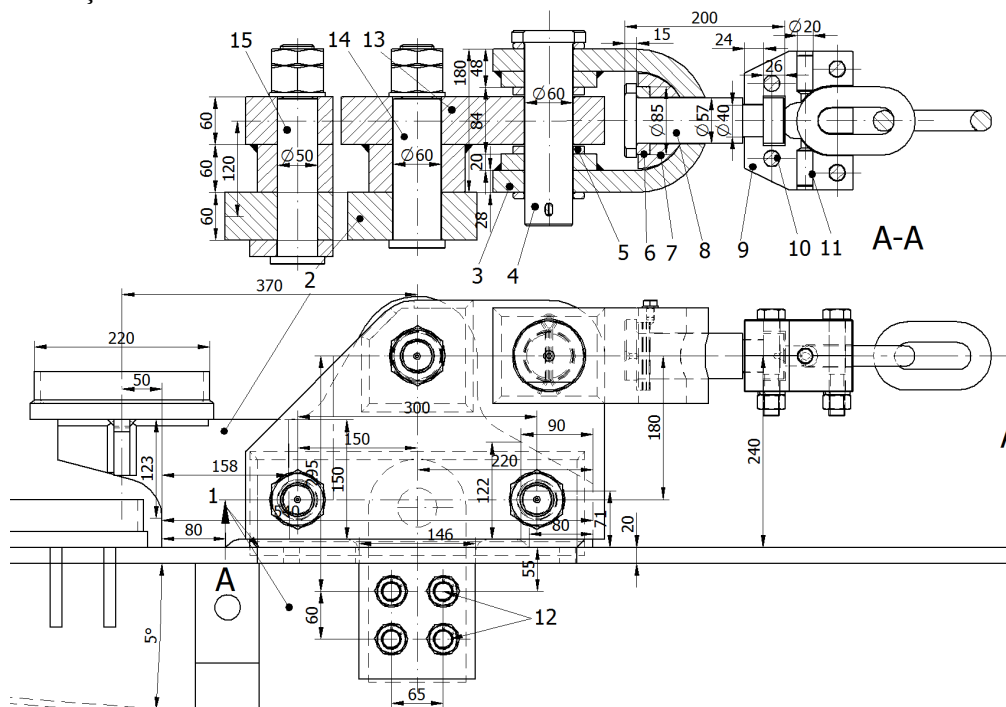


Fig. 3. Modelul de calcul pentru sistemul de legătură la stația de acționare [3]

Pe baza modelului de calcul din figura 4 a fost întocmit un breviar de calcul în MathCAD pentru variația forței de tractare a combinei F_{tc} între 160 și 250 kN, iar valorile coeficienților de siguranță sunt prezentate grafic în figura 5 pentru următoarelor elemente constructive:

- placa laterală de legătură, 13, (fig. 4a);
- urechea fixată pe stație, 2, (fig. 4b);
- urechea dispozitivului de legătură, 3, (fig. 4c);
- bolț articulație $\Phi 60 \times 245$, 4, (fig. 4d);
- tijă de tractare $\Phi 57 \times 200$, 8, (fig. 4e);
- bride de prindere a zalei lanțului, 9, (fig. 4f).

Coeficienți de siguranță au rezultat prin raportare la caracteristicile mecanice ale oțelului OL 37, limita de curgere de 210 N/mm^2 , pentru table și OLC 45 îmbunătățit, limita de curgere de 500 N/mm^2 , pentru bolțuri. Valorile cele mai mici sunt la încovoiere bolț, reperul

4, $C_{sib}=1,28$, și la forfecarea urechii bridei de fixare a lanțului, reper 9, $C_{sflub}=1,29$, aceste valori pot fi amplificate de 1,7 ori dacă raportarea se face la rezistența de rupere.

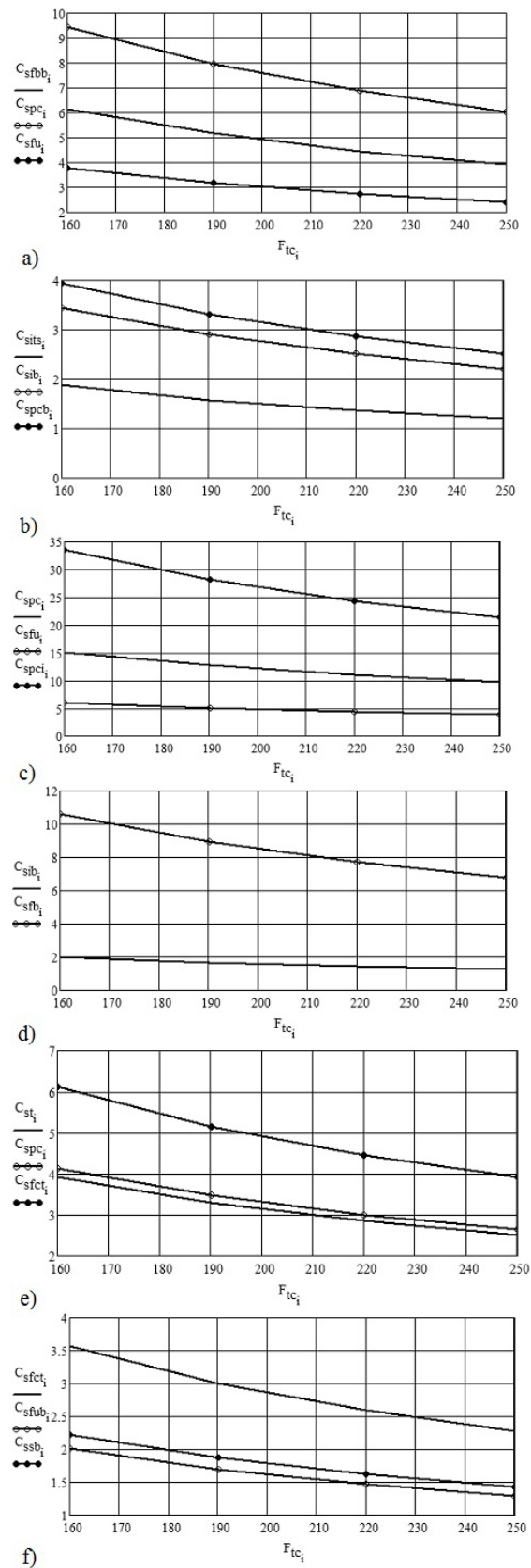


Fig. 4. Variația coeficienților de siguranță ai sistemului de legarea la stația de acționare

Pe baza documentației de execuție a fost realizat la E.M. Lonea sistemul de legare a lanțului combinei la stația de acționare, figura 5.



Fig. 5. Sistemul de legare a lanțului la stația de acționare executat la E.M. Lonea [3]

3. Sistemul de legare la stația de întoarcere

În figura 6 este prezentată soluția constructivă de amplasare a sistemului de legare a capătului lanțului calibrat cu zale 26x92 al mecanismului de avans al combinei 2K-52MY, reper 2, la construcția metalică a stației de întoarcere, reper 1.

Soluția constructivă a sistemului de legare este prezentat în figura 7, care se compune din: 1 – ureche fixată pe stație; 2 – bolț articulație $\Phi 60$; 3 – dispozitiv de prindere lanț; 4 – șurub M30x100; 5 – șurub M30x200.

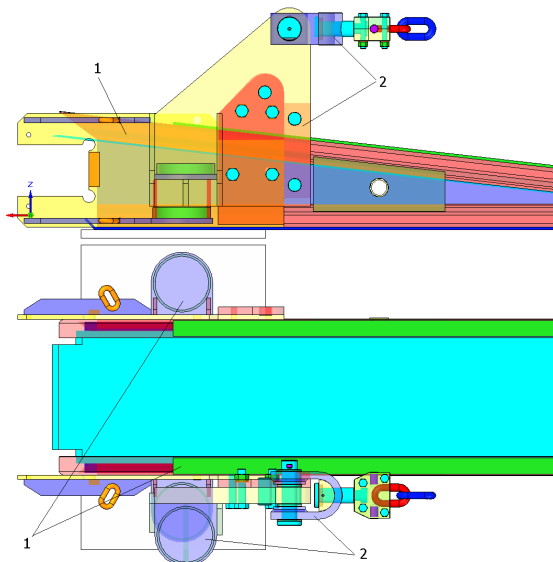


Fig. 6 Modul de amplasare al sistemului de legare pe stația de întoarcere [3]

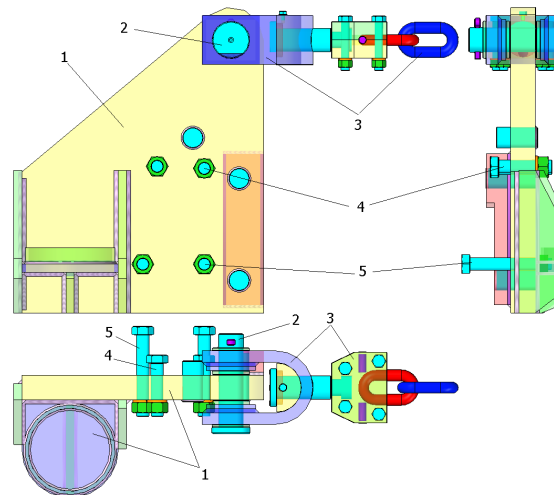


Fig. 7. Soluția constructivă a sistemului de legare a capătului lanțului pe stația de întoarcere TR-5 [3]

Sistemul de legare a capătului lanțului pe stația de întoarcere TR-5 prezintă următoarele îmbunătățiri constructive:

- urechea care se fixează pe stație, pe urechea de ridicare printr-un bolț $\Phi 50$ și patru șuruburi M30, are pe partea din față un prag rigidizat prin două bolțuri $\Phi 50$, care blochează rotirea urechii față de peretele stației;
- pe partea exterioară a urechii s-a amplasat suportul pentru stâlpul hidraulic SVJ de ancorare a stației, într-o construcție sudată mai solidă de cât cea de pe stația de întoarcere;
- prin suprapunerea suporturilor pentru stâlp se evită greșirea amplasării stâlpului de ancorare;
- în cazul schimbării stației de întoarcere trebuie debitată cu flacăra oxiacetilenică o parte din guseurile de rigidizare a suportului pentru stâlp de pe stația de întoarcere, pe partea de montare a urechii, și trebuie executate în urechea de ridicare cele două găuri pentru șuruburile de M30x100.

Pe baza soluției constructive din figura 6 a fost întocmit modelul de calcul cu dimensiunile constructive în vederea verificării dimensionale a elementelor acestuia, care este prezentat în figura 8, unde s-au notat: 1 - urechea de ridicare a stației; 2 - urechea sistemului de legare; 3 - bolț $\Phi 50 \times 100$; 4 - bolț $\Phi 50 \times 120$; 5 - șurub M30x100; 6 - dispozitiv de legare lanț.

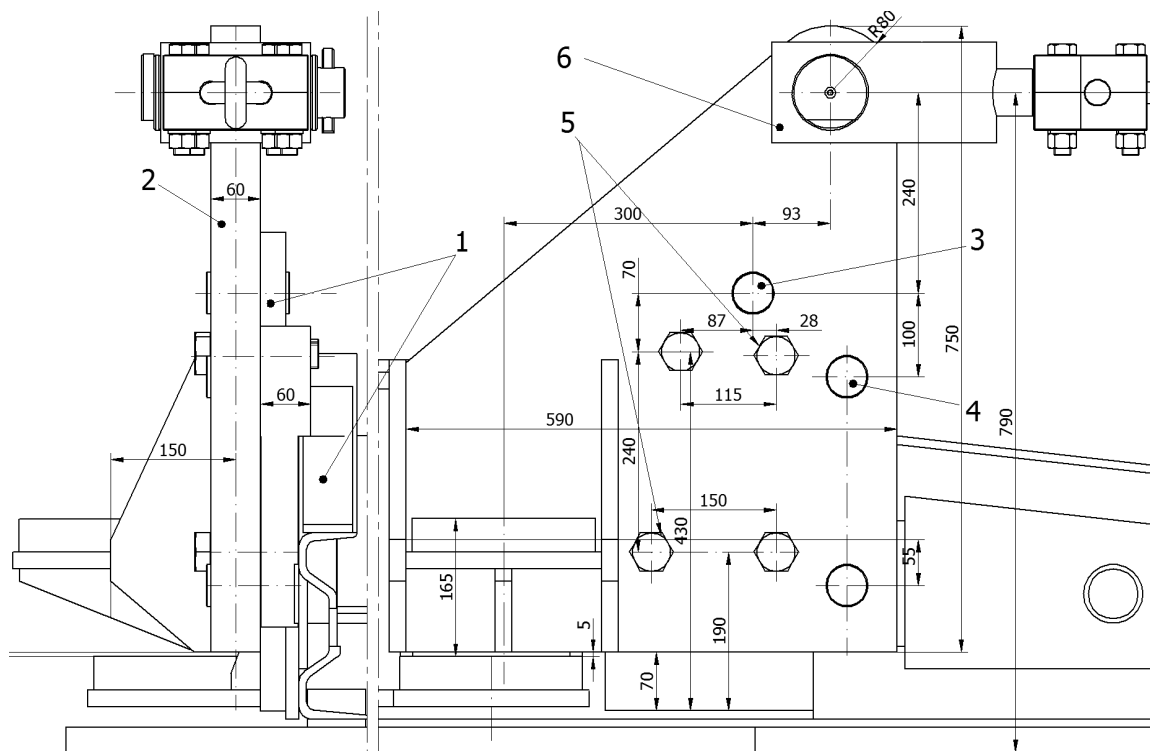


Fig. 8. Modelul de calcul pentru sistemul de legare la stația de întoarcere [3]

Pe baza modelului de calcul din figura 8 a fost întocmit un breviar de calcul în MathCAD pentru variația forței de tractare a combinei F_{tc} între 160 și 250 kN, iar valorile coeficienților de siguranță sunt prezentate grafic în figura 9 pentru următoarelor elemente constructive:

- asamblarea prin bolțul $\Phi 50 \times 80$, 4, și șuruburile M30x100, 5, a urechii pe peretele stației, (fig. 9a);
- urechea de ridicare a stației, 1, (fig. 9b).

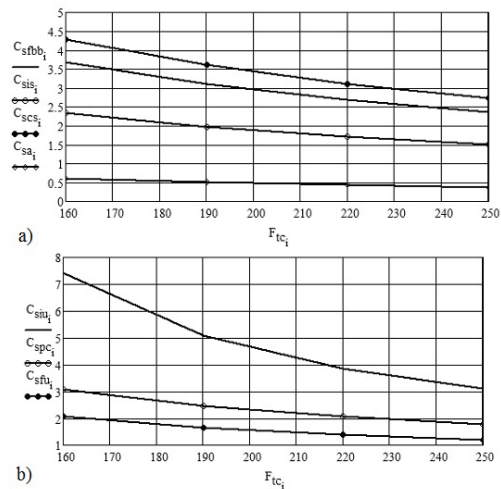


Fig. 9. Variația coeficienților de siguranță ai sistemului de legare la stația de întoarcere [3]

Pentru că valoarea coeficientului de siguranță la alunecare C_{sa} are valori mici s-a realizat blocarea suplimentară a urechii față de urechea de ridicare a stației de întoarcere prin bolțurile $\Phi 50 \times 120$, reper 4, și a unei rigle verticale.

Pe baza documentației de execuție a fost realizat la E.M. Lonea sistemul de legare a lanțului combinei la stația de întoarcere, figura 10.

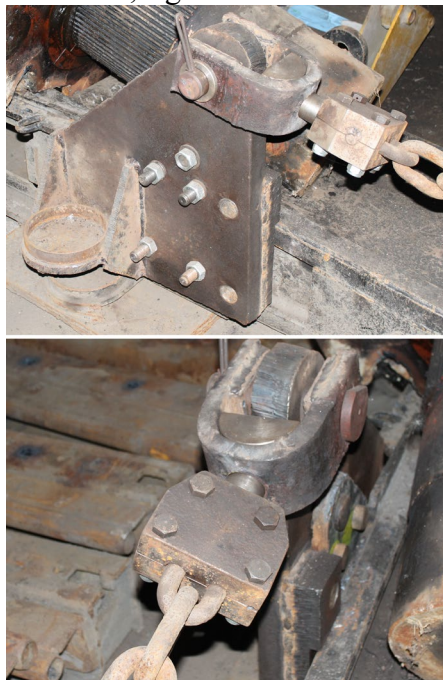


Fig. 10. Sistemul de legare a lanțului la stația de întoarcere executat la E.M. Lonea [3]

Pentru a verifica modul de amplasare și deplasare a combinei 2K-52MU pe transportorul realizat din stații de TR-5, jgheaburi de TR-6 și laterale de TR-7A, a fost realizat montajul din figura 11 în Atelierul Mecanic al E.M. Lonea, având montate pe stații noile sisteme de legare a capetelor lanțului mecanismului de avans al combinei.



Fig. 11. Montarea combinei pe transportor [3]

4. Concluzii

Chiar dacă înălțimea de tăiere a combinei nu este corelată cu înălțimea abatajului a rezultat o creștere de productivitate la o investiție minimă de re tehnologizare a abatajului.

Prin adaptarea combinei de abataj 2K-52MU la un transportor cu raclete hibrid, stații de TR-5, jgheaburi de TR-6 și laterale de TR-7A, s-a câștigat o experiență în utilizarea acestor utilaje la exploatarea abatajelor frontale cu susținere individuală și tăiere cu combina.

Prin încercarea de deplasare a combinei pe transportor au fost verificate sistemele de legare a capetelor lanțului mecanismului de avans la stațiile transportorului.

Informațiile obținute în urma re tehnologizării abatajului de la E.M. Lonea, cu avantajele și dezavantajele aplicării metodei, vor permite în viitor realizarea unei optimizări a corelării utilajelor dintr-un abataj cu front scurt.

5. Bibliografie

1. Dalban, C., ș.a. – *Construcții metalice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
2. Gafițeanu, M., ș.a. – *Organe de mașini, vol. I și II*, Editura Tehnică, București 1983.
3. * * * - *Documentație tehnică privind adaptarea sistemului de legare a combinei 2K-52 MY de stațiile transportorului tip TR-5 și verificarea stabilității combinei pe transportor*, contract 713/ 26.08.2013, E.M. Lonea.